Über Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität zu Breslau

eingereicht

und mit Genehmigung derselben veröffentlicht von

Otto Toeplitz

Dienstag den 10. Oktober 1905 vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

VORTRAG:

„Die Prinzipien der abzählenden Geometrie“

und

Promotion

ACAD. LUGD BAT. BIBL.

Breslau 1905

Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich) in Breslau

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Prof. **Dr. Rosanes.**

Termin der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1905.

Herrn Geheimrat Rosanes

als Zeichen der Hochachtung und Dankbarkeit

und

meinem lieben Vater

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0153

Einleitung und historische Übersicht.

Seien p Formen $f_1, \cdots, f_p$ gleichen Grades n von p Variabeln $x_1, \cdots, x_p$ vorgelegt, deren Funktionaldeterminante

$$F = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|$$

identisch verschwindet. Das identische Verschwinden von F hat nach dem fundamentalen Satze von *Jacobi* zur Folge, daß zwischen diesen Formen eine identische Relation $\omega(f_1, \cdots, f_p) = 0$ besteht; die Homogeneität ferner und die Gleichheit der Grade der Funktionen $f_1, \cdots, f_p$ ergeben, daß ω selbst als eine ganze, homogene Funktion seiner Argumente $f_1, \cdots, f_p$ angenommen werden darf.

Über diese wohlbekannten Tatsachen hinaus kann man noch eine Reihe von Fragen über die vorgelegten Formen stellen, welche bisher nur beiläufig behandelt worden zu sein scheinen, und mit denen sich die vorliegende Arbeit beschäftigen soll.

Man kann z. B. danach fragen, ob bereits zwischen $p - 1$ Formen gleichen Grades von p Variabeln eine besondere Beziehung bestehen muß, damit sich zu ihnen eine p^{te} vom selben Grade hinzubestimmen lasse, die von jenen abhängig ist, ohne — trivialer Weise — linear von ihnen abzuhängen.

Man kann ferner verlangen, eine endliche Anzahl von kanonischen Darstellungen anzugeben derart, daß irgend p Formen n^{ten} Grades, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, sich durch eine lineare Substitution der Variabeln $x_1, \cdots, x_p$ von nicht verschwindender Determinante stets in eine jener endlich vielen kanonischen Darstellungen überführen lassen.

Oder, anders ausgedrückt, man kann verlangen: für ein vorgegebenes p und n die Koeffizienten der p Formen n^{ten} Grades $f_1, \cdots, f_p$ auf endlich viele Arten als rationale oder gar als ganze rationale Funktionen von endlich vielen Parametern $p_1, \cdots, p_\rho$ darzustellen derart, daß $f_1, \cdots, f_p$ stets abhängige Formen sind, welche Werte man auch $p_1, \cdots, p_\rho$ in irgend einer dieser Darstellungen erteilen mag, und daß man umgekehrt eine jede Gruppe von p abhängigen Formen n^{ten} Grades erhält, indem man in einer passenden

unter jenen endlich vielen Darstellungen den Parametern $p_1, \cdots, p_\rho$ passende Werte erteilt — und diese Fragestellung wäre zu beantworten für jedes Paar ganzer positiver Zahlen n, p $(n \geqq 2, p \geqq 2)$.

Schließlich kann man auch nach den besonderen Eigenschaften der Form $\omega(f_1, \cdots, f_p)$ fragen, sowie nach dem Zusammenhang, der zwischen den Eigenschaften dieser Form und den Eigenschaften der Formen $f_1, \cdots, f_p$ besteht. So kann man z. B. verlangen, sämtliche Systeme von p Formen $f_1, \cdots, f_p$ anzugeben, zwischen denen eine quadratische Identität besteht, u. a. m.

Für binäre Formen $(p = 2)$ ist die Beantwortung aller dieser Fragen von trivialer Einfachheit. Denn wenn zwei Formen[1]) unter einander abhängig sind, also $\omega(f_1, f_2)$ identisch verschwindet, so muß jedenfalls einer der Linearfaktoren der Form $\omega(f_1, f_2)$, etwa $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, identisch verschwinden, d. h. f_1, f_2 unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor — ein Satz, den man übrigens auch leicht beweisen kann, ohne den Fundamentalsatz der Algebra zu benutzen.

Für ternäre Formen $(p = 3)$ finden sich jene Fragestellungen in der Literatur alle beantwortet, wenn sie auch nicht gerade in den obigen Formulierungen ausgesprochen sind.

Zunächst hat *J. Hahn*[2]) für Kegelschnittnetze $(p = 3, n = 2)$ nachgewiesen, daß das identische Verschwinden der *Jacobi*schen Form nicht notwendig das Bestehen einer linearen Dependenz zwischen je drei Kegelschnitten des Netzes nach sich zieht, sondern nur das einer quadratischen Relation, die speziell auch das Quadrat einer linearen sein kann, nie aber das Produkt zweier verschiedenen linearen. Er zeigt dann weiter, daß, falls das Netz nicht in ein Büschel ausartet, es aus lauter Geradenpaaren mit einem und demselben Doppelpunkt besteht und also alle Geradenpaare mit diesem Doppelpunkt enthält.

Allgemeiner hat dann *Pasch*[3]) für ternäre Formen beliebigen Grades $(p = 3)$ den Satz bewiesen:

„Zwischen drei ternären Formen n^{ten} Grades mit verschwin-
„dender Funktionaldeterminante, aber ohne gemeinschaftlichen
„Teiler besteht allemal eine irreduzible Gleichung ν^{ten} Grades
„vom Geschlecht Null, wo ν einen Teiler von n bedeutet. Ist
„$n = \mu\nu$, so lassen sich die drei gegebenen Formen darstellen
„als Formen ν^{ten} Grades, deren Argumente zwei ternäre Formen
„μ^{ten} Grades sind."

---

1) von zwei oder auch mehr Variabeln

2) Math. Ann. 15, S. 111—121.

3) Math. Ann. 18, S. 91f. und S. 93f.

Geometrisch zu reden, besagt dieser Satz, daß, wenn die drei vorgelegten Formen bezw. die durch sie dargestellten Kurven nicht selbst ein Büschel bilden, sie sich doch zusammensetzen aus den Kurven eines Büschels von Kurven der niedrigeren Ordnung $\mu = \frac{n}{\nu}$. Denn seien f_1, f_2, f_3 die drei gegebenen Formen, und lassen sie sich als binäre Formen zweier ternären Ausdrücke μ^{ten} Grades u, v darstellen, so kann man diese drei binären Formen jede in Linearfaktoren der Gestalt $\alpha u + \beta v$ zerlegen und erkennt so, daß alle drei Kurven f_i in je ν Kurven μ^{ter} Ordnung desjenigen Kurvenbüschels zerfallen, das durch u und v konstituiert wird.

Daß dieser Satz von *Pasch* umkehrbar ist, ist geometrisch wie analytisch unmittelbar evident. Auch beantwortet er offenbar die sämtlichen oben gestellten Fragen. Es bleibt somit für ternäre Formen nichts hinzuzufügen, es sei denn, daß man auf die Hilfsmittel des Beweises des Satzes von *Pasch* Wert legt; bei *Pasch* sind dieselben nämlich nicht durchweg rationale, die Wurzelexistenz wird in ausgedehntem Maße vorausgesetzt.[1])

Für Formen von mehr als drei Variabeln ($p > 3$) liegt ein Spezialresultat vor in der Arbeit von *Gordan* und *Noether*[2]) über das identische Verschwinden der *Hesse*schen Form. Danach hat im ternären und quaternären Gebiet das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante bei solchen Formensystemen, die sich als Systeme der ersten Polaren einer einzigen Form (von einem um eins höheren Grade) auffassen lassen, das Bestehen einer linearen Dependenz zur Folge. Für mehr als vier Variable gilt, entgegen der irrtümlichen Annahme von *Hesse*, ein analoger Satz nicht; schon im quinären Gebiete treten Ausnahmen auf. *Gordan* und *Noether* geben für den quinären Fall alle diese Ausnahmen erschöpfend an; für mehr als fünf Variabeln beschränken sie sich darauf, einzelne Klassen von solchen Ausnahmen aufzuführen.

In der folgenden Arbeit werden vorerst einige allgemeine Sätze über p abhängige Formen n^{ten} Grades entwickelt (§ 2), welche hinreichen, um das *Hahn*sche Resultat — zugleich allgemeiner für drei abhängige quadratische Formen von p Variabeln — herzuleiten (§ 3). Ein Spezialsatz über abhängige quadratische Formen von p Variabeln genügt sodann, um auch den Fall von vier abhängigen

---

1) Insbesondere benutzt *Pasch* einen Satz von *Lüroth* (Math. Ann. 9, S. 163—165), dessen Herleitung sich auf den Fundamentalsatz der Algebra stützt, trotzdem es seinem Inhalt nach nicht ausgeschlossen wäre, ihn ohne ein derartiges Hilfsmittel zu beweisen.

2) Math. Ann. 10, S. 547—568.

quadratischen Formen von p Variabeln mit verhältnismäßig sehr einfachen Hilfsmitteln zu erledigen (§ 4). §§ 5 und 6 geben weitere Spezialsätze über p abhängige quadratische Formen von p Variabeln, mit deren Hilfe es in § 7 gelingt, auch alle Systeme von 5 abhängigen quinären quadratischen Formen aufzuzählen; auffallend erscheint die geringe Anzahl der sich hierbei ergebenden Systeme. Aber auch an sich dürften die Spezialsätze von § 5 und 6 ein Interesse bieten; insbesondere sei auf die Bemerkung am Schluß des § 6 verwiesen, der übrigens die Kenntnis von § 3 und § 5 nicht voraussetzt. § 8 endlich gibt einige analytische Sätze, die am Ende des zweiten Teiles gebraucht werden.

Diesem ersten, rein algebraischen Teil der Arbeit schließt sich nämlich ein zweiter Teil an, der sich auch geometrischer Vorstellungen bedient. Er hat zugleich den Zweck, die im ersten Teil verwendeten Methoden von anderer Seite zu beleuchten und die dort entwickelten Spezialsätze als besondere Fälle allgemeinerer Sätze erscheinen zu lassen, die an sich nicht des Interesses entbehren dürften.

Erster Teil.

§ 1. Einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Sind $f_1, \cdots, f_p$ p homogene Funktionen n^{ten} Grades der Veränderlichen $x_1, \cdots, x_p$, ist ϱ eine homogene Funktion k^{ten} Grades derselben Veränderlichen, und ist $n \neq 0$, $n+k \neq 0$, so stimmen die Funktionaldeterminanten von $f_1, \cdots, f_p$ und von $\varrho f_1, \cdots, \varrho f_p$ genau im Range überein.

Beweis. Sei $q \leqq p$, so ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\varrho f_1)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(\varrho f_1)}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial(\varrho f_q)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(\varrho f_q)}{\partial x_p} \\ u_{1,q+1} & \cdots & u_{p,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1,p} & \cdots & u_{p,p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_1\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} & \cdots & \varrho\frac{\partial f_1}{\partial x_p} + f_1\frac{\partial \varrho}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho\frac{\partial f_q}{\partial x_1} + f_q\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} & \cdots & \varrho\frac{\partial f_q}{\partial x_p} + f_q\frac{\partial \varrho}{\partial x_p} \\ u_{1,q+1} & \cdots & u_{p,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1,p} & \cdots & u_{p,p} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \varrho}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varrho}{\partial x_p} \\ 0 & \varrho\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_1\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} & \cdots & \varrho\frac{\partial f_1}{\partial x_p} + f_1\frac{\partial \varrho}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \varrho\frac{\partial f_q}{\partial x_1} + f_q\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} & \cdots & \varrho\frac{\partial f_q}{\partial x_p} + f_q\frac{\partial \varrho}{\partial x_p} \\ 0 & u_{1,q+1} & \cdots & u_{p,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u_{1,p} & \cdots & u_{p,p} \end{vmatrix}$$

oder, wenn man für $i = 2, \cdots, q+1$ je von der i^{ten} Zeile die mit f_{i-1} multiplizierte erste Zeile subtrahiert und den Faktor $\frac{1}{n\varrho}$ aus der so veränderten Determinante herauszieht,

$$\Delta = \frac{1}{n\rho}\begin{vmatrix} n\rho & \frac{\partial\rho}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\rho}{\partial x_p} \\ -f_1 n\rho & \rho\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \rho\frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -f_q n\rho & \rho\frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \rho\frac{\partial f_q}{\partial x_p} \\ 0 & u_{1,q+1} & \cdots & u_{p,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u_{1,p} & \cdots & u_{p,p} \end{vmatrix}$$

und auf Grund des *Euler*schen Satzes von den homogenen Funktionen

$$\Delta = \frac{1}{n\rho}\begin{vmatrix} (n+k)\rho & \frac{\partial\rho}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\rho}{\partial x_p} \\ 0 & \rho\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \rho\frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \rho\frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \rho\frac{\partial f_q}{\partial x_p} \\ \sum_i u_{i,q+1}x_i & u_{1,q+1} & \cdots & u_{p,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_i u_{i,p}x_i & u_{1,p} & \cdots & u_{p,p} \end{vmatrix}.$$

Ist nun $q-1$ der Rang von $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$, so verschwinden in $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$ alle Minoren q^{ten} Grades, und folglich verschwindet Δ, welche Werte man darin auch den Größen u beilegen mag, wie aus der zuletzt hingeschriebenen Gestalt von Δ ersichtlich ist; in $\left|\frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_k}\right|$ verschwinden also ebenfalls alle Minoren q^{ten} Grades, da Δ einen solchen Minor darstellt, falls man den Größen u in einer passenden Verteilung die Werte 0 und 1 beilegt; daher ist der Rang von $\left|\frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_k}\right|$ höchstens gleich dem von $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$. Vorausgesetzt ist beim Beweise bisher: $n \neq 0$.

Wendet man dieses eben erlangte Resultat auf $\rho f_1, \ldots, \rho f_p$ und $\frac{1}{\rho}$ an, anstatt auf $f_1, \ldots, f_p$ und ρ, so tritt $n+k$ an Stelle von n. Ist also auch $n+k \neq 0$, so folgt, daß der Rang von $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$

oder, was dasselbe ist, von $\left|\frac{\partial(\frac{1}{\rho}\cdot\rho f_i)}{\partial x_k}\right|$ höchstens gleich dem von $\left|\frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_k}\right|$ ist, und somit stimmen beide Rangzahlen genau überein, *q. e. d.*

Seien zwei Reihen von Formen der Veränderlichen $x_1, \cdots, x_p$ gegeben, $g_1, g_2, \ldots$ und $h_1, h_2, \cdots$, von denen keine identisch verschwindet, verschwinden aber alle Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1 & h_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

identisch, ist also

$$\frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2} = \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \text{ in gekürzter Gestalt etwa } = \frac{g}{h},$$

so ist man berechtigt, $g_i = \rho_i\, g$, $h_i = \rho_i\, h$ zu setzen, unter ρ_i ebenfalls ganze homogene Funktionen verstanden; h ist ein gemeinsamer Teiler aller h_i. Sind nun die h_i ohne einen ihnen allen gemeinsamen Teiler, so ist h notwendig eine Konstante, $g_i = \rho_i g = \frac{h_i}{h} g = h_i \frac{g}{h} = h_i \rho$, und es ist zugleich evident, daß ρ der größte gemeinsame Teiler der g_i ist. Also:

Hilfssatz 2. Sind zwei Reihen nicht verschwindender Formen

$$g_1, g_2, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{und } h_1, h_2, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

einander proportional, und besitzen die h_i keinen ihnen allen gemeinsamen Teiler, so kann man eine Form ρ finden, sodaß (für jedes i) $g_i = \rho h_i$ ist.

Hieraus resultieren unmittelbar noch die folgenden Sätze:

Hilfssatz 2a. Sind auch die g_i ohne einen ihnen allen gemeinsamen Teiler, so darf man $g_i = constans.\ h_i$ setzen,

und

Hilfssatz 2b. Hat eine Matrix von beliebiger Höhe und Breite, deren Elemente nichtverschwindende Formen sind, den Rang 1, so kann man ihre Elemente g_{ik} in die Form $p_i\, q_k\, z$ setzen, wo z der größte gemeinsame Teiler aller g_{ik} ist, p_i der der Elemente der i^{ten} Zeile, q_k der der Elemente der k^{ten} Kolonne.[1])

---

1) Befindet sich unter den Elementen g_{ik} ein identisch verschwindendes, so verschwinden, falls die Matrix den Rang 1 hat, entweder alle Elemente seiner Zeile identisch, oder aber alle Elemente seiner Kolonne; Hilfssatz 2b bleibt also auch in diesem Falle richtig, falls man zuläßt, daß einige p_i oder q_k verschwinden.

§ 2. Allgemeine Sätze über q abhängige Formen von p Variabeln ($q \leqq p$).

Seien p Formen $f_1, \cdots, f_p$ gleichen Grades n von p Variabeln $x_1, \cdots, x_p$ vorgelegt, deren Funktionaldeterminante

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, so hat das Schema der ersten Minoren von F nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie den Rang 1. Der obige Hilfssatz 2b ist daher auf dieses Schema anwendbar und ergibt, daß es in der Form

$$\begin{vmatrix} \theta\,\varphi_1\,\psi_1 & \theta\,\varphi_2\,\psi_1 & \cdots & \theta\,\varphi_p\,\psi_1 \\ \theta\,\varphi_1\,\psi_2 & \theta\,\varphi_2\,\psi_2 & \cdots & \theta\,\varphi_p\,\psi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta\,\varphi_1\,\psi_p & \theta\,\varphi_2\,\psi_p & \cdots & \theta\,\varphi_p\,\psi_p \end{vmatrix}$$

angesetzt werden darf, wo die Formen $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ ohne einen ihnen allen gemeinsamen Teiler sind, und ebenso die Formen $\psi_1, \cdots, \psi_p$ [1]. Die Entwicklung von F nach den Elementen einer Kolonne bezw. einer Zeile ergibt die Relationen

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p} \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p)$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p),$$

welche geradezu als die Definition der ψ_i und φ_i angesehen werden können, falls man die Teilerfremdheit dieser beiden Reihen von Formen noch voraussetzt.

Multipliziert man (1) mit x_α, summiert über α und wendet den *Euler*schen Satz von den homogenen Funktionen an, so folgt

$$(1a) \qquad \sum_{i=1}^{p} f_i \psi_i = 0.$$

[1] Die Formen φ_i und ψ_i werden auch von *Gordan* und *Noether* a. a. O. (in der Bezeichnung ξ_i und h_i) sowie von *Pasch* (jedoch nicht in der oben zitierten Arbeit, sondern Math. Ann. 44, S. 89 ff.) benutzt.

Sind die ψ_i Konstanten, so liegt also der triviale Fall vor, daß die f_i linear abhängig sind; umgekehrt sind in diesem Falle die ψ_i immer Konstanten, eventuell sämtlich Null.

Satz 1. Sind die ψ_i Konstanten, ohne sämtlich zu verschwinden, so sind die f_i linear abhängig.

Man zeigt ohne wesentliche Schwierigkeit, daß die ψ_i Kovarianten des Systems der Formen f_i sind, nicht aber Kombinanten. Vielmehr, wenn man anstelle der f_i lineare Verbindungen f_i' von ihnen betrachtet und für diese die den Formen ψ_i analogen Formen ψ_i' aufstellt, so setzen sich die ψ_i' aus den ψ_i linear zusammen, und zwar in kontragredienter Weise wie die f_i' aus den f_i. Und in gewisser Reziprozität hierzu besitzen die φ_i die Kombinanteneigenschaft, ohne Kovarianten der f_i zu sein: wenn bei einer linearen Transformation der Variabeln x_i die f_i in andere Formen $f_i'(x')$ übergehen, und $\varphi_i'(x')$ die zu ihnen gehörigen, den φ_i analogen Formen sind, so sind die φ_i', falls man ihre Argumente x_i' durch ihre Werte in den x_i vermöge der Transformation ersetzt, lineare Verbindungen der φ_i, und zwar genau dieselben linearen Verbindungen, wie die x_i' von den x_i.

Satz 2. Die Formen ψ_i sind simultane Kovarianten der Formen f_i, jedoch keine Kombinanten; vielmehr erleiden sie, wenn man auf die f_i eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante anwendet, die kontragrediente Substitution. Die φ_i hingegen besitzen die Kombinanteneigenschaft, sind aber keine Kovarianten der f_i, sondern transformieren sich den Variabeln x_i kongruent.

Dieser Satz gestattet einige für das folgende wichtige Anwendungen. Sind einerseits die ψ_i linear abhängig, so kann man auf Grund desselben sicher solche lineare Verbindungen f_i' der f_i finden, daß von den zu ihnen gehörigen ψ_i' eines verschwindet, sodaß also bereits $p-1$ der p Formen f_i' unter sich abhängig sind. Ist umgekehrt dies letztere möglich, so sind offenbar die ψ_i linear abhängig. Die Tatsache, daß es nicht möglich ist, die f_i in der angegebenen Weise durch lineare Verbindungen zu ersetzen, die im folgenden oft wesentlich sein wird, soll als Tatsache A bezeichnet werden.

Annahme A. Wenn es nicht möglich ist, auf die f_i eine solche lineare Substitution anzuwenden, daß bereits ein Teil der substituierten Formen f_i' unter sich abhängig ist, so soll gesagt werden, die f_i erfüllen die Annahme A.

Auf Grund dieser Definition kann der Satz ausgesprochen werden:

Satz 3. Die Annahme A ist identisch damit, daß die ψ_i linear unabhängig sind.

Sind andererseits die φ_i Konstanten, so kann man es wegen Satz 2 durch eine lineare Substitution der x_i erreichen, daß von den transformierten φ_i eines, etwa φ_p', der Wert 1, die übrigen den Wert 0 haben. Dabei verwandelt sich die Relation (2) in

$$\frac{\partial f_\alpha'}{\partial x_p'} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p),$$

d. h. die f_α' sind sämtlich von x_p frei:

Satz 4. Sind die φ_i Konstanten, ohne sämtlich zu verschwinden, so kann man die f_i durch eine passende lineare Transformation der Variabeln x_i von nicht verschwindender Determinante in Formen von nur p—1 Variabeln verwandeln.

Es sollen jetzt allgemeiner q ($\leq p$) abhängige Formen von p Variabeln betrachtet werden; dafür möge aber auf der anderen Seite vorausgesetzt werden, daß diese q Formen der Annahme A genügen, d. h. also, daß sie weder stärker als einfach abhängig sind, noch daß ein Teil von ihnen unter sich abhängig ist, noch daß sie sich linear in derartige andere q Formen $f_1', \ldots, f_q'$ überführen lassen, die eine der vorgenannten Eigenschaften haben.

Denkt man die (q—1)-gliedrigen Minoren ihrer Funktionalmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{vmatrix}$$

wiederum in ein Schema geschrieben, das diesmal q Zeilen hoch und $\binom{p}{q-1}$ Kolonnen breit sein wird, so werden die einzelnen Kolonnen einander und somit gewissen teilerfremden Formen $\psi_1, \cdots, \psi_q$ proportional sein; von ihnen kann man hier also ebensogut reden, wie in dem bisher betrachteten Falle $q = p$, während die den φ_i analogen, aber zahlreicheren Größen hier schwerer zu übersehen sein werden. Für die ψ_i gelten unmittelbar die Relationen (1) und (1a) und daher auch der zu Satz 1 analoge

Satz 1a. Erfüllen q abhängige Formen von p Variabeln ($q \leqq p$) die Annahme A, und sind die zugehörigen Formen ψ_i Konstanten, so sind die Formen f_i linear abhängig.

Sei allgemein $\omega(f_1, \cdots, f_q) = 0$ die identische Relation, die zwischen $f_1, \cdots, f_q$ besteht, so ist

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \omega}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p),$$

und da der Rang der Matrix $\mathfrak{M}$ genau $q-1$ ist, und nicht niedriger, genügen somit die q Größen $\frac{\partial \omega}{\partial f_1}, \cdots, \frac{\partial \omega}{\partial f_q}$ denselben $q-1$ unabhängigen linearen, homogenen Gleichungen, wie die von einem ihnen allen gemeinsamen Teiler freien Größen $\psi_1, \cdots, \psi_q$. Nach Hilfssatz 2 ist es mithin statthaft,

$$\frac{\partial \omega}{\partial f_i} = P(x) \cdot \psi_i \tag{3}$$

anzusetzen. Die ψ_i lassen sich also durch einen passenden Faktor $P(x)$ stets so ergänzen, daß sie rational und ganz durch die f_i darstellbar sind; dabei geht zugleich die Identität (1a) in die identische Relation $\omega(f_1, \ldots, f_q) = 0$ über.

Differenziert man (1a) nach x_α:

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} + \sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha} = 0$$

und subtrahiert davon (1), so folgt:

$$\sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p), \tag{1b}$$

ein Gleichungssystem, welches lehrt, daß auch die Funktionalmatrix der ψ_i höchstens vom Rang $q-1$ ist.

Satz 5. Die Funktionalmatrix der ψ_i ist höchstens vom Range $q-1$.

Es liegen danach zwei Möglichkeiten vor: dieser Rang r von $\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\right|$ ist genau $= q-1$ oder $< q-1$; das letztere tritt z. B. in den von *Gordan* und *Noether* behandelten Fällen durchweg ein; das erstere ist sozusagen das allgemeinere und ist in gewissem Sinne einfacher zu behandeln.

Ist $r = q-1$ und stellt man diejenigen Größen $\overline{\psi}_i$ auf, die aus den ψ_i ebenso hervorgehen, wie die ψ_i aus den f_i, so ist man sicher, daß diese nicht sämtlich verschwinden, da sonst $r < q-1$ wäre; man hat dann analog zu (1):

$$\sum \bar{\psi}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p)$$

und somit ein System von $q-1$ unabhängigen linearen, homogenen Gleichungen, denen sowohl die Formen $f_1, \ldots, f_q$ als auch die Formen $\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_q$ genügen. Die $\bar{\psi}_i$ sind also von den f_i nur durch konstante Faktoren unterschieden, wenn man noch annimmt, daß die f_i keinen ihnen allen gemeinsamen Teiler besitzen, eine Annahme, zu welcher der Hilfssatz 1 die Berechtigung gibt. Führt man also noch die Definition ein:

Annahme B. Es soll gesagt werden, daß die f_i die Annahme B erfüllen, wenn die zugehörigen ψ_i der Annahme A genügen,

so kann der Satz ausgesprochen werden:

Satz 6. Erfüllen die f_i neben der Annahme A noch die Annahme B, so stehen die ψ_i in einem reziproken Verhältnis zu den f_i.

Es gilt nun, die Sätze 2, 3 und 4 unter den jetzigen allgemeineren Voraussetzungen zu verfolgen. Was die Sätze 2 und 3 anbelangt, so gelten diese unmittelbar auch hier, soweit sie die Formen ψ_i betreffen, und nicht die φ_i.

Satz 3a. Unter der Annahme A können die ψ_i nicht linear abhängig sein.

Sind die ψ_i linear, so sind sie, da nach Satz 5 überhaupt abhängig, linear abhängig; also:

Satz 3b. Unter der Annahme A können die ψ_i nicht linear sein.

Satz 4 hingegen, der von den φ_i handelt, bereitet größere Schwierigkeiten.

Betrachtet man das Schema der $(q-1)$-gliedrigen Minoren von $\mathfrak{M}$, und sind diese zeilenweise proportional zu konstanten Größen — für $q = p$ ist diese Voraussetzung identisch mit der von Satz 4, daß die φ_i konstant sind —, so soll jetzt gezeigt werden, daß sich die f_i durch eine lineare Transformation der $x_1, \cdots, x_p$ von nicht verschwindender Determinante von $p-q+1$ der Variabeln befreien lassen.

Da nämlich $\mathfrak{M}$ genau vom Range $q-1$ ist, gibt es unter den q-gliedrigen Determinanten von $\mathfrak{M}$ sicher eine, die ebenfalls genau den Rang $q-1$ hat; seien die Indizes der x_i so gewählt, daß $\Delta_q = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_q)}{\partial(x_1, \cdots, x_q)}$ genau den Rang $q-1$ besitzt. Dann sind $f_1, \cdots, f_q$ q Funktionen der q Variabeln $x_1, \cdots, x_q$, deren Funktionaldeterminante den Rang $q-1$ hat; freilich sind sie nicht notwendig homogene Funktionen von $x_1 \cdots, x_q$ allein. Trotzdem ist Satz 2 und der aus ihm gefolgerte Satz 4 auf Δ_q anwendbar, da es weder bei dem (oben übergangenen) Beweise von Satz 2 noch bei dem weiteren Schluß

auf Satz 4 nötig ist, jene Homogeneität vorauszusetzen. Mithin kann man es durch eine Substitution der $x_1, \cdots, x_q$ erreichen, daß $\varphi_1' = 0, \cdots, \varphi_{q-1}' = 0$, $\varphi_q' = 1$ ist, sodaß die f_i von x_q frei werden; zugleich wird dann die Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1'}{\partial x_1'} & \cdots & \frac{\partial f_1'}{\partial x_{q-1}'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q'}{\partial x'} & \cdots & \frac{\partial f_q'}{\partial x_{q-1}'} \end{vmatrix}$$

genau vom Range q—1 sein; denn wären alle ihre Determinanten gleich Null, so wären in $\Delta_q' = \frac{\partial(f_1', \cdots, f_q')}{\partial(x_1', \cdots, x_q')}$ sämtliche $(q-1)$-gliedrigen Minoren Null, da die übrigen, in der eben hingeschriebenen Matrix nicht enthaltenen $(q$—1)-gliedrigen Minoren von Δ'_q je durch eine der Größen $\varphi_1', \cdots, \varphi'_{q-1}$ teilbar sind, diese Größen aber verschwinden; es würde also der Rang von Δ'_q und somit auch der von Δ_q sich unter q—1 erniedrigen. Es wird daher auch $\Delta'_{q+1} = \frac{\partial(f_1' \cdots \cdots f_q')}{\partial(x_1', \cdots, x_{q-1}', x_{q+1}')}$ vom Range q—1 sein. Indem man auf Δ'_{q+1} jetzt genau dieselbe Schlußweise anwendet, dann auf Δ''_{q+2} u. s. f., kann man die f_i successive von den Variabeln $x_q, \cdots, x_p$ befreien, *q. e. d.*

Satz 4a. Sind die $(q$—1$)$-gliedrigen Minoren der Funktionalmatrix $\mathfrak{M}$ der ψ_i zeilenweise proportional zu konstanten Größen, so kann man die f_i durch eine lineare Transformation der x_i von nicht verschwindender Determinante in Formen von nur q—1 Variabeln verwandeln.

Schließlich sei noch folgender leicht zu erkennende Satz notiert:

Satz 7. Ist α der Grad der φ_i, β der Grad der ψ_i, so ist

$$\alpha + \beta \leqq (q-1)\ (n-1).$$

§ 3. Anwendung auf drei und vier abhängige quadratische Formen von p Variabeln.

Die entwickelten Sätze reichen hin, um nicht nur das Resultat von *Hahn* in sehr einfacher Weise herzuleiten, sondern auch den Fall dreier abhängiger quadratischer Formen von beliebig vielen Variabeln vollständig, den von vieren mit nur einer Lücke zu behandeln, die auszufüllen im nächstfolgenden Paragraphen leicht gelingen wird.

a) $n = 2$, $q = 3$. Die Sätze der zweiten Hälfte von § 2 gelten nur unter der Annahme A; ist diese für $q = 3$ nicht erfüllt, kann man also durch Anwendung einer linearen Substitution von nicht verschwindender Determinante die f_i in drei andere Formen f_i', lineare Verbindungen der f_i, überführen, von denen bereits zwei unter sich abhängig sind, etwa f_1', f_2', so können sich diese nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde; f_1', f_2' und somit auch f_1', f_2', f_3' sind also notwendig linear abhängig, wenn die Annahme A nicht erfüllt ist.

Es kann daher angenommen werden, daß A erfüllt ist. Alsdann sind die ψ_i sicher nicht alle Null, und ihr Grad kann nach Satz 7 die Zahl $(n-1)(q-1) = (2-1)(3-1) = 2$ nicht übersteigen. Die ψ_i sind also entweder Konstanten oder linear oder quadratisch. Im ersten Fall sind die f_i wegen Satz 1a wiederum linear abhängig. Der zweite Fall verträgt sich, Satz 3b zufolge, überhaupt nicht mit der Annahme A. Erst bei quadratischen ψ_i ($\beta = 2$) tritt eine andere Möglichkeit als die lineare Dependenz der f_i auf. Ist $\beta = 2$, so ist $\alpha = 0$, die φ_i sind Konstanten, und Satz 4 oder 4a. lehrt daß sich die f_i durch eine lineare Transformation der x_i von nicht verschwindender Determinante in binäre quadratische Formen verwandeln lassen, daß sie also alle in Linearfaktoren zerfallen, welche sich aus denselben beiden Linearformen linear zusammensetzen.

Für $p = 3$ ist dies das *Hahn*sche Resultat. Für $p = 4$ hat man, geometrisch ausgesprochen, neben linearer Abhängigkeit (Büschel) den Fall dreier Ebenenpaare mit derselben Doppelgerade.

b) $n = 2$, $q = 4$. Die Eventualität, daß die Annahme A nicht erfüllt ist, beginnt hier bereits wesentlicher zu werden. Kann man nämlich $f_1, .., f_4$ durch 4 lineare Verbindungen $f_1', .., f_4'$ ersetzen, von denen f_1', f_2', f_3' unter sich abhängig sind, so muß man das ganze unter a) erhaltene Ergebnis heranziehen, um diese Möglichkeit zu untersuchen. Denn nimmt man umgekehrt irgend drei abhängige quadratische Formen f_1', f_2', f_3' von p Variabeln, fügt eine ganz willkürliche vierte f_4' hinzu, und nimmt vier beliebige lineare Verbindungen von f_1', f_2', f_3', f_4', etwa f_1, f_2, f_3, f_4, von denen nun keine drei mehr unter sich abhängig zu sein brauchen, so hat man stets einen Fall von vier abhängigen quadratischen Formen von p Variabeln vor sich, und alle solche Fälle aufzuzählen ist ja die zu behandelnde Aufgabe.

Wie unter a) gezeigt, hat man dabei f_1', f_2', f_3' entweder linear abhängig anzunehmen — dann werden aber f_1', f_2', f_3', f_4' und somit auch f_1, f_2, f_3, f_4 linear abhängig sein, was kein Interesse bietet — oder man kann f_1', f_2', f_3' als binäre Formen annehmen, etwa $f_1' = x_1^2$, $f_2' = x_1 x_2$, $f_3' = x_2^2$; sei $f_4' = f(x_1, \cdots, x_p)$ eine beliebige quadratische

Form der p Variabeln, so wird man also den allgemeinsten Fall, für den Annahme A nicht erfüllt ist, erhalten, wenn man irgend vier lineare Kompositionen von diesen f_1', f_2', f_3', f_4' nimmt. Man kann

$$f_1 = x_1^2,\ f_2 = x_1 x_2,\ f_3 = x_2^2,\ f_4 = f(x_1, \cdots, x_p)$$

als „kanonische Darstellung" dieses Falles ansehen, wobei das „Kanonische" der Darstellung so zu verstehen ist, daß man durch lineare Transformationen der x_i und der f_i den fraglichen Fall stets auf die angegebene Gestalt bringen kann.

Für $p = 4$ bedeutet dieser Fall geometrisch, daß die 4 Flächen 2. O. sich alle in zwei Punkten P_1, P_2 oder längs einer Gerade g berühren; die Ebenenpaare mit $|P_1 P_2|$ bezw. g als Doppelgerade sind dann die bei der algebraischen Herleitung des Falles wichtig gewesenen f_1', f_2', f_3' und deren lineare Verbindungen.

Erst jetzt kommt der Hauptfall an die Reihe, daß A erfüllt ist und alle Sätze von § 2 gelten. β kann hier bis $(n-1)(q-1) = (2-1)(4-1) = 3$ aufsteigen. $\beta = 0$ gibt lineare Dependenz (Satz 1a), $\beta = 1$ ist ausgeschlossen (Satz 3b), $\beta = 3$ gibt den Fall, daß $f_1, \cdots, f_4$ sich als ternäre, quadratische Formen von drei Linearformen u, v, w darstellen lassen (Satz 4a), geometrisch (für $p = 4$) den Fall von vier Kegeln mit derselben Spitze.

Es bleibt der vierte Fall $\beta = 2$. In diesem darf angenommen werden, daß die ψ_i linear unabhängig sind, wegen Satz 3a. Die Erledigung dieses letzten Falles geschieht am einfachsten mit Hilfe einiger allgemeinerer Sätze, welche speziell den Fall $n = 2$, $\beta = 2$ (bei beliebig vielen Variabeln x_i) betreffen.

§ 4. Einige Spezialsätze für den Fall $n = 2$, $\beta = 2$. Ergänzung des vorigen Paragraphen.

Vorgelegt seien $q\ (\leqq p)$ quadratische Formen von p Variabeln, deren zugehörige ψ_i selbst quadratisch und linear unabhängig (Annahme A) sind.

Ich gehe von den Identitäten (1) und (1b) aus:

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0 \quad , \quad \sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = 0$$

und differenziere die eine nach x_β, die andere nach x_α:

$$(4) \qquad \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \psi_i = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = \sum_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} f_i.$$

Mache ich jetzt zunächst davon Gebrauch, daß die f_i quadratisch sind, indem ich

$$f_i = f_i(x, x) = \sum a_{\alpha\beta}^{(i)} x_\alpha x_\beta$$

ansetze, so folgt aus (4):

$$2\sum_i a_{\alpha\beta}^{(i)}\,\psi_i = \sum_i \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,f_i\,. \tag{4a}$$

Man betrachte nunmehr die Matrix der Größen $a_{\alpha\beta}^{(i)}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{pp}^{(1)} \\ a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{pp}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11}^{(q)} & a_{12}^{(q)} & a_{13}^{(q)} & \cdots & a_{pp}^{(q)} \end{vmatrix}.$$

Ist diese von niedrigerem Range als dem Höchstrange q, so kann man q Konstanten $c_1, c_2, \cdots, c_q$ finden, durch die die Zeilen der Matrix zu Null komponiert werden; es wäre also $\Sigma c_i f_i = 0$, d. h. die f_i wären linear abhängig.

Da diese triviale Möglichkeit ausgeschlossen werden darf, so folgt, daß die obige Matrix den Höchstrang q besitzt, daß man also q Wertepaare α, β angeben kann, deren Kolonnen in der obigen Matrix eine nicht verschwindende Determinante bilden. Denkt man sich jetzt (4a) nur für diese q Wertepaare α, β hingeschrieben — (4a) gilt für jedes Wertepaar α, β —, so hat man q unhomogene, lineare Gleichungen für die Größen ψ_i, deren Determinante von Null verschieden ist, die also nach den ψ_i aufgelöst werden können. Man erhält so die ψ_i als lineare Verbindungen der Größen

$$\sum_i \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,f_i. \tag{5}$$

Fügt man jetzt die Annahme hinzu, daß auch $\beta = 2$ ist, also $\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ Konstanten, so werden die ψ_i lineare Verbindungen der f_i, und da die ψ_i außerdem linear unabhängig sein sollten, so kann man auch umgekehrt die f_i linear aus den ψ_i zusammensetzen.

Die Identität (1a): $\Sigma f_i\psi_i = 0$ geht damit in eine quadratische Identität zwischen den f_i über: $\omega(f_1, \cdots, f_q) = 0$, und die quadratische Form ω darf vom Höchstrange q angenommen werden. Denn gesetzt ω wäre von niedrigerem Range, so könnte man durch eine lineare Substitution der f_i von nicht verschwindender Determinante ω in eine quadratische Form von weniger als q Variabeln verwandeln, z. B. $f_1'^2 + \cdots + f_s'^2$ $(s < q)$, da sich alle quadratischen Formen gleichen Ranges in einander linear transformieren lassen; man könnte also q lineare Verbindungen f_i' der f_i angeben, von denen schon ein Teil abhängig wäre, was der Annahme A widerspricht. Es kann also der Satz ausgesprochen werden:

Spezialsatz 1. Liegen q quadratische Formen $f_1, \cdots, f_q$ von $p(\geqq q)$ Variabeln $x_1, \cdots, x_p$ vor, sind die zugehörigen Formen ψ_i ebenfalls quadratisch und ist die Annahme A erfüllt, so setzen sich die ψ_i linear aus den f_i zusammen und umgekehrt, und (1) *geht über in eine quadratische Identität zwischen den f_i vom Höchstrange q.*

Dieser Satz gestattet, die im vorigen Paragraphen gebliebene Lücke ohne Mühe auszufüllen.

Im Falle $q = 4$ nämlich kann man ω, da es vom Rang 4 ist, stets auf die Form bringen

$$f_1' f_3' - f_2' f_4',$$

sodaß $f_1' f_3' = f_2' f_4'$ ist. Gesetzt nun, f_1' wäre irreduzibel, so würde es entweder f_2' oder f_4' teilen, also von dem einen von beiden nur durch einen konstanten Faktor unterschieden sein; die f_i' und somit auch die f_i wären dann linear abhängig. Mithin ist f_1' das Produkt zweier Linearfaktoren; genau so erkennt man dies von f_3', und es folgt ebenso für f_2', f_4'. Sei $f_1' = a(x) \cdot c(x)$, $f_3' = b(x) \cdot d(x)$, so setzt f_2' sich aus zwei der Faktoren a, b, c, d zusammen, f_4' aus den beiden anderen; dabei muß f_2' einen Faktor aus f_1', einen aus f_3' entnehmen, damit es nicht gleich f_1' oder gleich f_3' wird. Sei, was nur an der Bezeichnungsweise liegt, $f_2' = a(x) \cdot d(x)$, $f_4' = b(x) \cdot c(x)$.

Sind umgekehrt a, b, c, d vier beliebige Linearformen und setzt man die f_i' in der angegebenen Weise aus ihnen zusammen, so ist $f_1' f_3' = f_2' f_4'$, man hat also vier abhängige quadratische Formen.

Um schließlich eine vollständig kanonische Darstellung des betrachteten Falles zu haben, beachte man, daß a, b, c, d als unabhängige Linearformen angenommen werden dürfen, da sich sonst $f_1', \ldots, f_4'$ als quadratische Formen von nur drei linearen Verbindungen der x_i ansehen ließen, eine Möglichkeit, die sich im vorigen Paragraphen schon anderweitig ergeben hat. Durch eine passende Koordinatentransformation kann man daher für den soeben behandelten Fall stets die kanonische Schreibweise erreichen:

$$f_1' = x_1' x_3', \; f_2' = x_1' x_4', \; f_3' = x_2' x_4', \; f_4' = x_2' x_3'.$$

Geometrisch hat man, für $p = 4$, vier Flächen 2. O., die zwei windschiefe Geraden gemein haben.

Gesamtergebnis für $n = 2$, $q = 4$:

1. *lineare Dependenz*
2. $f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3), f_4(x_1, x_2, x_3)$ (4 Kegel mit derselben Spitze)

3. $x_1^2, x_1x_2, x_2^2, f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ (die Flächen berühren sich in zwei Punkten oder längs einer Gerade)
4. $x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_2x_3$ (die Flächen haben zwei windschiefe Geraden gemein).

Spezialsatz 1 enthält zugleich auch ein rationales und sehr einfaches Verfahren, für den Fall $n = 2$, $\beta = 2$ die quadratische Identität $\omega = 0$ aufzustellen.

§ 5. Spezialsätze über p abhängige quadratische Formen von p Variabeln ($n = 2$, $q = p$).

Das nächste Ziel der Untersuchung soll die vollständige Behandlung des Falles fünf abhängiger quadratischer Formen von fünf Variabeln sein, wenn auch die zu diesem Ende abzuleitenden Hilfssätze des vorliegenden und auch noch des nächsten Paragraphen allgemeinere Gültigkeit haben, und wohl auch an sich ein Interesse besitzen.

In Anbetracht dessen kann das bisher verfolgte rekursive Verfahren von $q - 1$ auf q, durch welches immer die der Annahme A nicht genügenden Systeme von q abhängigen Formen reduziert wurden auf Systeme von weniger als q abhängigen Formen, verlassen und $q = p$ angenommen werden. Nur wenn man von den quinären quadratischen Formen weiter zu den senären aufsteigen wollte, wäre man genötigt, sich auch über fünf abhängige Formen von sechs Variabeln zu orientieren.

Seien

$$f_i = f_i(x, x) = \sum_{\alpha,\beta} a^{(i)}_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (i = 1, \cdots, p)$$

p abhängige quadratische Formen der Variabeln $x_1, \cdots, x_p$, für die die Annahme A erfüllt ist (die ψ_i linear unabhängig sind), und seien θ, φ_i, ψ_k die nach den Regeln von § 2 hinzukonstruierten Formen (bzw. von den Graden ϑ, α, β), so gilt:

$$\sum \varphi_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p) \tag{2}$$

und ferner, wie zu Anfang von § 4 erörtert:

$$\sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \psi_i = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = \sum_i f_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \tag{4}$$

wofür man wegen $n = 2$ auch schreiben kann:

$$2 \sum_i a^{(i)}_{\alpha\beta} \psi_i = -\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\beta} = \sum_i f_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{4a}$$

Aus (2) folgt durch Differentiation nach x_k:

$$2\sum_i a_{ik}^{(\alpha)} \varphi_k + \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0,$$

oder

$$\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right]_{x=\varphi} + \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0,$$

oder, mit veränderten Indizes:

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi} = -\sum_\mu \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_k}. \quad (6)$$

Ferner mögen in

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p) \quad (1)$$

die Variabeln x_i durch $\lambda x_i + \mu y_i$ ersetzt werden:

$$\sum_i \psi_i(\lambda x + \mu y) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\lambda x+\mu y} = 0$$

oder, da f_i quadratisch, also $\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}$ linear ist:

$$\sum_i \psi_i(\lambda x + \mu y) \left\{\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} + \mu \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=y}\right\} = 0. \quad (7)$$

Wird hierin $y_i = \varphi_i(x)$ gesetzt, so folgt unter Benutzung von (6):

$$\sum_i \psi_i (\lambda x + \mu \varphi) \left\{\lambda \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} - \mu \sum_\beta \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right\} = 0$$

oder, wenn $\delta_{\alpha\beta}$ die von *Kronecker* vielfach benutzten Größen sind, die verschwinden, falls $\alpha \neq \beta$ ist, und $= 1$ sind für $\alpha = \beta$:

$$\sum_{i,\beta} \psi_i (\lambda x + \mu \varphi) \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta} \left\{\lambda \delta_{\alpha\beta} - \mu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right\} = 0. \quad (8)$$

Indem man hierin α der Reihe nach gleich $1, \cdots, p$ setzt, hat man p homogene, lineare Gleichungen für die p Größen $\psi_i(\lambda x + \mu \varphi)$; das Koeffizientensystem dieser p Gleichungen ist das (symbolische) Produkt der Matrizen

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\beta}\right) \text{ und } \left(\lambda \delta_{\alpha\beta} - \mu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right);$$

die zweite dieser beiden Matrizen hat bei unbestimmtem λ den Höchstrang (ihre Determinante verschwindet nicht), die erste hat genau den Defekt 1, da ein größerer Defekt mit Annahme A nicht

verträglich wäre; mithin hat auch das Produkt beider Matrizen genau den Defekt 1, seine ersten Minoren verschwinden nicht sämtlich und sind also zufolge (8) den Größen $\psi_i(\lambda x + \mu\varphi)$ kolonnenweise proportional. Nun ist[1]) jeder Minor eines Produktes zweier Matrizen nach der Regel des *Cauchy*schen Determinantensatzes komponiert aus einer gewissen Reihe von Minoren derselben Ordnung des einen und aus einer gewissen Minorenreihe des anderen Faktors; daher sind die $\psi_i(\lambda x + \mu\varphi)$ proportional zu Größen, die sich aus

$$\theta\psi_i\varphi_1, \cdots, \theta\psi_i\varphi_p$$

linear und homogen zusammensetzen, und zwar mittels solcher Faktoren, die Minoren der zweiten der beiden obigen Matrizen, also unabhängig vom Index i sind. Die $\psi_i(\lambda x + \mu\varphi)$ sind mithin proportional den $\psi_i(x)$, und da die letzteren ohne gemeinsamen Teiler sind, gestattet Hilfssatz 2 den Ansatz

$$\psi_i(\lambda x + \mu\varphi) = \mathfrak{B}(x;\lambda,\mu)\psi_i(x), \tag{9}$$

wo $\mathfrak{B}$ eine ganze, homogene Funktion von $x_1, \cdots, x_p$ einerseits, von λ, μ andererseits ist:

$$\mathfrak{B}(x;\lambda,\mu) = \lambda^{\beta} + \lambda^{\beta-1}\mu\mathfrak{B}_1(x) + \cdots + \lambda\mu^{\beta-1}\mathfrak{B}_{\beta}(x) + \mu^{\beta}\mathfrak{H}(x).$$

Speziell folgt

$$\psi_i(\varphi) = \mathfrak{H}(x)\psi_i(x). \tag{9a}$$

Ähnliche Formeln gelten auch für die f_i und die φ_i, jedoch nur unter der Voraussetzung B, daß auch die ψ_i — wie dies von den f_i bei der Annahme A immer vorausgesetzt wird — nicht stärker als einfach abhängig sind, mit anderen Worten, daß auch für die ψ_i die Annahme A gilt, daß also $r = p - 1$ ist.

Differenziert man nämlich den vorderen und den mittleren Ausdruck von (4a) nach x_γ:

$$2\sum_i a^{(i)}_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\gamma} = -2\sum_i a^{(i)}_{\alpha\gamma}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\beta} - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \tag{4b}$$

multipliziert mit $\varphi_\alpha\varphi_\beta$ und summiert über α, β, so hat man:

$$2\sum_i f_i(\varphi,\varphi)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\gamma} = -2\sum_{i,\alpha,\beta} a^{(i)}_{\alpha\gamma}\varphi_\alpha\varphi_\beta\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\beta} - \sum_{i,\alpha,\beta}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\varphi_\alpha\right)\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}\varphi_\beta;$$

(2) zufolge verschwindet der zweite Summand rechts. Was den ersten betrifft, so ist

$$\sum_\beta \varphi_\beta\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\beta}$$

[1]) Vgl. z. B. *Kronecker*, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten I, S. 321 und S. 353.

wegen (9) nur durch einen vom Index i unabhängigen Faktor, nämlich $\mathfrak{B}_1(x)$, von $\psi_i(x)$ unterschieden, also jener Summand gleich

$$-\sum_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\gamma}\right]_{x=\varphi} \psi_i \cdot \mathfrak{B}_1.$$

Andererseits ergibt die Multiplikation von (4a) mit φ_α und die Summation über α:

$$2\sum_{i,\alpha} a^{(i)}_{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_i = -\sum_{i\alpha}\left(\varphi_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = 0$$

oder

$$\sum_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\beta}\right]_{x=\varphi} \psi_i = 0;$$

dies zeigt, daß auch jener erste Summand verschwindet; es ist daher

$$\sum_i f_i(\varphi,\varphi)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\gamma} = 0. \tag{10}$$

Soweit gilt alles noch, ohne daß Annahme B herangezogen wird. Fügt man jetzt diese hinzu, so stellt (10) ein System von $p-1$ unabhängigen, linearen, homogenen Gleichungen für die p Größen $f_i(\varphi,\varphi)$ dar, und zwar dasselbe, dem wegen (1b) auch die $f_i(x,x)$ genügen. Daher ist der Ansatz berechtigt:

$$f_i(\varphi,\varphi) = \mathfrak{A}(x)\, f_i(x,x). \tag{1}$$

Beachtet man noch, daß wegen (2)

$$f_i(x,\varphi) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0$$

ist, so folgt aus (11):

$$f_i(\lambda_1 x + \lambda_2\varphi, \mu_1 x + \mu_2\varphi) = (\lambda_1\mu_1 + \mathfrak{A}\lambda_2\mu_2)\, f_i(x,x), \tag{12}$$

also speziell für $\lambda_i = \mu_i$:

$$f_i(\lambda_1 x + \lambda_2\varphi, \lambda_1 x + \lambda_2\varphi) = (\lambda_1^2 + \mathfrak{A}\lambda_2^2)\, f_i(x,x). \tag{12a}$$

Bezüglich der $\varphi_i(\lambda x + \mu\varphi)$ soll jetzt eine ähnliche Relation hergeleitet werden; anstatt jedoch durch fortgesetztes Differenzieren der verfügbaren Identitäten, will ich sie durch eine kurze Überlegung aus (12) ableiten.

Ist $\lambda_1 x_i + \lambda_2\varphi_i$ eine willkürliche lineare Komposition der Stellen x_i und φ_i, so ist wegen (12) $\mu_1 x_i + \mu_2\varphi_i$ mit ihr bezüglich aller quadratischen Formen f_i konjugiert, falls

$$\lambda_1\mu_1 + \mathfrak{A}\lambda_2\mu_2 = 0$$

ist, falls man also

$$\mu_1 x_i + \mu_2\varphi_i = \mathfrak{A}\lambda_2 x_i - \lambda_1\varphi_i$$

wählt. Nun kennt man von anderer Seite her eine Stelle, die mit $\lambda_1 x_i + \lambda_2 \varphi_i$ bezüglich aller f_i konjugiert ist, nämlich die Stelle $\varphi_i(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi)$; denn wegen (2) ist allgemein:

$$f_i(\xi, \varphi(\xi)) = \sum_\alpha \mathfrak{r}_\alpha(\xi) \frac{\partial f(\xi, \xi)}{\partial \xi_\alpha} = 0$$

für jedes ξ. Kann man also weiter zeigen, daß es im allgemeinen zu einer Stelle $\lambda_1 x_i + \lambda_2 \varphi_i$ nur eine solche zweite gibt, die mit ihr bezüglich aller f_i konjugiert ist, so könnte man folgern, daß $\mathfrak{A}\lambda_2 x_i - \lambda_1 \varphi_i$ dieselbe Stelle ist, wie $\varphi_i(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi)$, daß also alle Determinanten der Matrix

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi) & \varphi_2(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi) & \cdots & \varphi_p(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi) \\ \mathfrak{A}\lambda_2 x_1 - \lambda_1 \varphi_1 & \mathfrak{A}\lambda_2 x_2 - \lambda_1 \varphi_2 & \cdots & \mathfrak{A}\lambda_2 x_p - \lambda_1 \varphi_p \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Daß sich nun für unbestimmte Werte von $x_1, \cdots, x_p, \lambda_1, \lambda_2$ zu $\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi$ nur eine Stelle hinzubestimmen läßt, die mit ihr bezüglich aller f_i konjugiert ist, ist leicht einzusehen; — für alle Werte ohne Ausnahme wäre es weder nötig, dies zu zeigen, noch auch möglich, da es für gewisse Ausnahmestellen falsch sein kann. Gesetzt nämlich, für unbestimmtes x und λ gäbe es nicht nur eine solche Stelle, sondern zwei, so wäre $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\lambda_1 x+\lambda_2 \varphi}$ für unbestimmtes x und λ vom Defekt 2, und für spezielle Werte von x und λ könnte sich dieser Defekt allenfalls nur erhöhen, z. B. für alle diejenigen Wertsysteme, für die $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ ist; es müßte dann also auch $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=x}$, d. h. kurz $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ für unbestimmtes x mindestens den Defekt 2 haben, was der Annahme A widersprechen würde.

Damit ist (13) bewiesen, und man kann dies auch dahin aussprechen, daß $\varphi_i(\lambda x + \mu \varphi)$ sich zwar nicht durch $\varphi_i(x)$ allein darstellen läßt, etwa in der Form $\varphi_i(\lambda x + \mu \varphi) = \mathfrak{S}(x)\varphi_i(x)$, immerhin aber in der Gestalt:

$$(13\,a) \qquad \varphi_i(\lambda x + \mu \varphi) = \mathfrak{S}.\varphi_i(x) + \mathfrak{T}x_i.$$

Aus (13) ergeben sich durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von λ noch einige Relationen. Sei nämlich

$$\varphi_i(\lambda_1 x + \lambda_2 \varphi) = \lambda_1^\alpha \varphi_i(x) + \frac{1}{1!}\lambda_1^{\alpha-1}\lambda_2 \sum_\mu \varphi_\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2!}\lambda_1^{\alpha-2}\lambda_2^2 \sum_{\mu\nu} \varphi_\mu \varphi_\nu \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$

$$+ \cdots + \frac{\lambda_1 \lambda_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \sum_{\mu,\nu\ldots} \varphi_\mu \varphi_\nu \cdots \frac{\partial^{\alpha-1}\varphi_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu \ldots} + \lambda_2^\alpha \varphi_i(\varphi)$$

$$= \lambda_1^\alpha \varphi_i(x) + \frac{\lambda_1^{\alpha-1}\lambda_2}{1!} D(\varphi_i) + \cdots + \frac{\lambda_1 \lambda_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} D_{\alpha-1}(\varphi_i) + \lambda_2^\alpha \varphi_i(\varphi),$$

so folgt aus (13):

$$-\varphi_i\varphi_k\lambda_1^{\alpha+1}+(\mathfrak{A}x_k\varphi_i-\varphi_k D(\varphi_i))\lambda_1^{\alpha}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^{\alpha+1}\mathfrak{A}x_k\varphi_i(\varphi)$$

$$+\varphi_k\varphi_i\lambda_1^{\alpha+1}-(\mathfrak{A}x_i\varphi_k-\varphi_i D(\varphi_k))\lambda^{\alpha}\lambda_2+\cdots-\lambda_2^{\alpha+1}\mathfrak{A}x_i\varphi_k(\varphi)=0;$$

durch Vergleichung der Koeffizienten von $\lambda_1{}^{\alpha}\lambda_2$ folgt erstens:

$$\mathfrak{A}(x_k\varphi_i-x_i\varphi_k)-\varphi_k D(\varphi_i)+\varphi_i D(\varphi_k)=0$$

oder

$$\{\mathfrak{A}x_k+D(\varphi_k)\}\,\varphi_i=\{\mathfrak{A}x_i+D(\varphi_i)\}\,\varphi_k,$$

sodaß wegen der Teilerfremdheit der φ_i

$$\mathfrak{A}x_i+D(\varphi_i)=\mathfrak{C}\varphi_i$$

oder

$$D(\varphi_i)=\mathfrak{C}\varphi_i-\mathfrak{A}x_i \tag{14}$$

angesetzt werden darf; und zweitens hat man durch Vergleichung der Koffizienten von $\lambda_2^{\alpha+1}$:

$$\mathfrak{A}\{x_i\varphi_k(\varphi)-x_k\varphi_i(\varphi)\}=0. \tag{15}$$

Spezialsatz 2. Sind $f_1,\cdots,f_p$ p abhängige quadratische Formen der p Variabeln $x_1,\cdots,x_p$, und ist für sie die Annahme A erfüllt, so ist

$$\psi_i(\lambda x+\mu\varphi)=\mathfrak{B}(x;\lambda,\mu)\,\psi_i(x). \tag{9}$$

Ist überdies die Annahme B erfüllt, so ist weiter noch

$$f_i(\varphi,\varphi)=\mathfrak{A}f_i(x,x) \tag{11}$$

$$\varphi_i(\lambda x+\mu\varphi)=\mathfrak{S}\varphi_i(x)+\mathfrak{T}x_i. \tag{13a}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ sind dabei Formen der Variabeln $x_1,\cdots,x_p$.

Für die Anwendung auf quinäre Formen wird insbesondere der Fall von Wichtigkeit sein, daß die durch (11) definierte Form $\mathfrak{A}$ identisch verschwindet, daß also $f_i(\varphi)=0$ ist. Dieser Fall soll daher hier (allgemein für p Variabeln) noch etwas weiter verfolgt werden.

Zunächst folgt aus $f_i(\varphi)=0$ durch Differentiation nach x_k:

$$\sum_{\nu}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}\right]_{x=\varphi}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_k}=0$$

oder unter Berücksichtigung von (6):

$$\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_k}=0 \qquad (i,k=1,\cdots,p); \tag{16}$$

hält man den Index k fest und läßt i von 1 bis p laufen, so hat man ein lineares Gleichungssystem, dessen Auflösung

$$\sum_{\nu}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_k}=\mathfrak{N}_k\varphi_\mu \tag{17}$$

ergibt, unter $\mathfrak{N}_1,\cdots,\mathfrak{N}_p$ Formen der x_i verstanden.

Multipliziert man (17) mit x_k und summiert über k, so folgt:

$$\alpha D(\varphi_\mu) \equiv \alpha \sum_\nu \varphi_\nu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} = \varphi_\mu \sum_k \mathfrak{N}_k x_k;$$

andererseits folgt aus (14), wenn $\mathfrak{A} = 0$ ist:

$$D(\varphi_\mu) = \mathfrak{C}\varphi_\mu;$$

mithin ist

$$\alpha \mathfrak{C} = \sum_k \mathfrak{N}_k x_k, \tag{18}$$

$$\alpha \sum_i \varphi_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} = \Big(\sum_k \mathfrak{N}_k x_k\Big) \varphi_\mu.$$

Multipliziert man ferner (17) mit φ_k und summiert über k, so hat man

$$\sum_\nu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_k} \varphi_k = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} D(\varphi_\nu) = \mathfrak{C} \sum_\nu \varphi_\nu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \varphi_\nu} = \mathfrak{C} D(\varphi_\mu) = \mathfrak{C}^2 \varphi_\mu,$$

also

$$\mathfrak{C}^2 \varphi_\mu = \varphi_\mu \sum_k \mathfrak{N}_k \bar{\varphi}_k,$$

$$\sum_k \mathfrak{N}_k \varphi_k = \mathfrak{C}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \Big(\sum_k \mathfrak{N}_k x_k\Big)^2. \tag{19}$$ —

Schließlich soll noch gezeigt werden, daß $\varphi_i(\varphi)$ verschwindet, wenn $\mathfrak{A} = 0$ ist. Ist nämlich $\mathfrak{A} = 0$, so ergibt (13a):

$$\varphi_i(\lambda x + \mu \varphi) = \mathfrak{S} \varphi_i(x)$$

und insbesondere, wenn $\mathfrak{S}$ für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ in $\mathfrak{G}$ übergeht:

$$\varphi_i(\varphi) = \mathfrak{G} \varphi_i; \tag{20}$$

es soll bewiesen werden, daß $\mathfrak{G} = 0$ ist.

Gesetzt, $\mathfrak{G}$ wäre nicht Null. Ersetzt man dann in (20) die Variabeln x_i durch $\varphi_i(x)$, so folgt durch wiederholte Anwendung von (20):

$$\varphi_i \{\varphi(\varphi)\} = \varphi_i(\mathfrak{G}\varphi_i) = \mathfrak{G}^\alpha \varphi_i(\varphi) = \mathfrak{G}^{\alpha+1} \varphi_i$$
$$= \mathfrak{G}(\varphi) \cdot \varphi_i(\varphi) = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G}(\varphi) \cdot \varphi_i, \text{ oder}$$
$$\mathfrak{G}(\varphi) = \mathfrak{G}^\alpha(x).$$

Ferner ergibt die Differentiation von (20):

$$\sum_\mu \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu}\right]_{x=\varphi} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_k} = \frac{\partial (\mathfrak{G}\varphi_i)}{\partial x_k};$$

darin mögen die Variabeln x_i durch φ_i ersetzt werden:

$$\left[\frac{\partial (\mathfrak{G}\varphi_i)}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi} = \mathfrak{G}^{\alpha-1} \sum_\mu \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu}\right]_{x=\varphi} \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}$$

wegen (17):

$$= \mathfrak{G}^{\alpha-1} [\mathfrak{N}_k \varphi_i]_{x=\varphi} = \mathfrak{G}^\alpha [\mathfrak{N}_k]_{x=\varphi} \varphi_i.$$

Danach ist $\left(\left[\frac{\partial(\mathfrak{G}\varphi_i)}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}\right)$ vom Range 1, wenn nicht gar vom Range 0. Nun ist andererseits

$$[\mathfrak{G}\varphi_i]_{x=\varphi} = \mathfrak{G}^{\alpha+1}\varphi_i,$$

also

$$\frac{\partial[\mathfrak{G}\varphi_i]_{x=\varphi}}{\partial x_k} = \sum_\mu \left[\frac{\partial(\mathfrak{G}\varphi_i)}{\partial x_\mu}\right]_{x=\varphi} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_k} = \frac{\partial(\mathfrak{G}^{\alpha+1}\varphi_i)}{\partial x_k},$$

d. h. $\left(\frac{\partial(\mathfrak{G}^{\alpha+1}\varphi_i)}{\partial x_k}\right)$ ist das Produkt zweier Matrizen, deren erste höchstens den Rang 1 hat; es hat daher selbst höchstens den Rang 1. Nun besagt Hilfssatz 1, daß $\left(\frac{\partial(\rho\varphi_i)}{\partial x_k}\right)$ genau denselben Rang hat, wie $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)$, falls $\rho \neq 0$ ist. Ist also $\mathfrak{G}^{\alpha+1} \neq 0$, so hat $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)$ höchstens den Rang 1, je zwei der φ_i sind abhängig, nur um einen konstanten Faktor unterschieden, die φ_i sind nicht nur nicht teilerfremd, sondern sogar proportional zu Konstanten. Daher bleibt nur übrig, daß $\mathfrak{G}$ verschwindet.

(5) ergibt schließlich, daß mit $f_i(\varphi)$ auch $\psi_i(\varphi)$ verschwindet.

Spezialsatz 3. Ist in (11) $\mathfrak{N} = 0$, *so ist:*

$$f_i(\varphi, \varphi) = 0,\ \psi_i(\varphi) = 0,\ \varphi_i(\varphi) = 0\ ^1),$$

$$(17) \qquad \sum_\mu \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_k} = \mathfrak{N}_k\varphi_i,$$

$$(19) \qquad \left(\sum_\mu \mathfrak{N}_\mu x_\mu\right)^2 = \alpha^2 \sum_\mu \mathfrak{N}_\mu\varphi_\mu.$$

Endlich noch einen Satz, bei dem die Annahme B wiederum entbehrlich ist. Es ist

$$(2) \qquad \sum_\beta \varphi_\beta \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta} = 0$$

oder

$$\sum_{\alpha,\beta} a^{(i)}_{\alpha\beta}\, x_\alpha \varphi_\beta = 0 \qquad (i = 1, \cdots, p)$$

Diese p homogenen, linearen Gleichungen für die φ_β besitzen eine und nur eine Lösung, da ihre Determinante $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$ genau vom Range $p-1$ angenommen ist (Annahme A). Man kann dieselben Gleichungen aber

---

1) Dieselben Formeln erhalten merkwürdigerweise auch *Gordan* und *Noether* in ihren Spezialfällen, also unter durchaus anderen Voraussetzungen. Im 2. Teile wird davon noch zu sprechen sein.

auch als lineare, homogene Gleichungen für die x_α ansehen, und zwar haben sie als solche wegen $a_{\alpha\beta}^{(i)} = a_{\beta\alpha}^{(i)}$ genau dieselbe Gestalt, sodaß sie bei der Auflösung

$$\varphi_\alpha(\varphi) = \rho x_\alpha \tag{21}$$

liefern, falls es berechtigt ist, sie nach den x_α aufzulösen, d. h. falls die Determinante $\left|\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\varphi}\right|$ genau den Defekt 1 hat.

Nun ist (6) $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\varphi} = \sum_\beta \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}$. Ist $\left|\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right| \neq 0$, so folgt, daß $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\varphi}$ denselben Rang hat, wie $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right)$, d. h. den Rang $p-1$. Weiß man umgekehrt, daß $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\varphi}\right)$ den Rang $p-1$ hat, so kann man (21) aufstellen und hat

$$\sum_i \left[\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i}\right]_{x=\varphi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\beta} = \frac{\partial(\rho x_\alpha)}{\partial x_\beta};$$

hätte dann $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\beta}\right)$ einen Defekt, so hätte auch wegen Hilfssatz 1, falls $\rho \neq 0$ ist, $\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = (\delta_{\alpha\beta})$ einen Defekt, was nicht der Fall ist. Daher ist $\rho = 0$, $\varphi_i(\varphi) = 0$, $[\theta\varphi_i\psi_k]_{x=\varphi} = 0$ für jedes i, k, d. h. alle ersten Minoren von $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x^k}\right]_{x=\varphi}\right)$ verschwänden doch, $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}\right)$ hätte doch den Defekt 2.

Spezialsatz 4. Hat $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}\right)$ *genau den Defekt* 1, *so ist* $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| \neq 0$, *und umgekehrt; überdies ist dann*

$$\varphi_i(\varphi) = \rho x_i. \tag{21}$$

Dabei ist über die f_i *nur vorausgesetzt, daß sie abhängige quadratische Formen sind und daß die Annahme A erfüllt ist.*

§ 6. Der Fall $n = 2$, $\beta = 2$ bei ungeradem p.

Wie schon im Paragraph 4 soll jetzt, spezieller also als im Paragraph 5, vorausgesetzt werden, daß nicht nur die f_i quadratisch sind

und der Annahme A genügen, sondern daß auch die ψ_i quadratisch sind. Es folgt dann, daß auch die Annahme B erfüllt ist. Denn gesetzt die ψ_i, die wegen Annahme A linear unabhängig sind, und aus denen sich somit zufolge Spezialsatz 1 die f_i linear komponieren lassen, wären stärker als einfach abhängig, so wären es auch die f_i, entgegen Annahme A.

Es soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß $\mathfrak{A} = 0$ ist, und daß somit die Voraussetzungen des Spezialsatzes 3 erfüllt sind, falls die Variabelnzahl p eine ungerade ist.

Es sei eine Bemerkung vorangeschickt. Wie in § 4 erörtert, ist die Identität $\omega(f_1, \ldots, f_p) = 0$ unter den jetzigen Voraussetzungen eine quadratische vom Höchstrange. Man kann daher solche lineare, linear unabhängige Verbindungen $\tilde{f}_i$ der f_i finden, daß $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \tilde{f}_i^2 = 0$ ist; dann ist

$$\tilde{\psi}_i = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{f}_i} = 2 \tilde{f}_i$$

Man kann demnach, wenn man will, die f_i im folgenden durch solche Formen $\tilde{f}_i$ ersetzen, die mit ihren ψ_i übereinstimmen; davon soll an geeigneter Stelle Gebrauch gemacht werden.

Die Matrix $\left(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta}\right)$ hat mindestens den Defekt 2. Denn es ist

$$\sum_{i,\alpha} x_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = 2 \sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha} = 0$$

wegen (1b), und

$$\sum_{i,\alpha} \varphi_\alpha \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = \sum D(f_i) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\beta} = 0$$

wegen (2); die φ_α sind ferner den x_α nicht proportional, da sonst (2) in

$$\sum x_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, p)$$

übergehen und der *Euler*sche Satz von den homogenen Funktionen ergeben würde, daß alle f_α verschwinden. Die Reihen der genannten Matrix lassen sich daher mindestens auf zwei verschiedene Weisen zu Null komponieren, die Matrix hat mindestens den Defekt 2.

Speziell wird also auch, unter Berücksichtigung der vorangeschickten Bemerkung, die Matrix

$$\left(\sum_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}\right)$$

mindestens den Defekt 2 haben, und daher auch

$$-\left(\sum_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\gamma}\right)\left(\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\beta}\right)=\left(\sum_i \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}\right]_{x=\varphi}\right)=(M_{\alpha\beta}).$$

Nun lautet andererseits (4b) für die $\tilde{f}_i$ folgendermaßen:

$$2\sum_i \tilde{a}^{(i)}_{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\gamma}=-2\sum_i \tilde{a}^{(i)}_{\alpha\gamma}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}-2\sum_i \tilde{a}^{(i)}_{\beta\gamma}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha}.$$

Die Multiplikation mit φ_γ und Summation über γ ergibt:

$$0=\left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha}\right]_{x=\varphi}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}+\left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}\right]_{x=\varphi}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\alpha},$$

d. h. die Matrix $(M_{\alpha\beta})$ ist eine schiefe (*gauche symétrique*).

Frobenius[1]) hat nun bewiesen, daß eine schiefe Matrix stets einen geraden Rang besitzt. Von $(M_{\alpha\beta})$ ist bewiesen, daß es mindestens den Defekt 2 besitzt, d. h. höchstens den Rang $p-2$; ist p eine ungerade Zahl, so ergibt der Satz von *Frobenius*, daß $(M_{\alpha\beta})$ höchstens den Rang $p-3$, also mindestens den Defekt 3 hat.

Nun besagt ein anderer Satz der Determinantentheorie[2]): wenn das Produkt zweier Matrizen den Defekt $\mu+\nu$ hat, und die eine hat den Defekt μ, so hat die andere mindestens den Defekt ν. $(M_{\alpha\beta})$ hat, wie gezeigt, bei ungeradem p den Defekt 3; der eine Faktor von $(M_{\alpha\beta})$, nämlich $\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k}\right)$, hat den Defekt 1; mithin hat der andere,

$$\left(\left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}\right)$$

mindestens den Defekt 2.

Aus (11) folgt durch Differentiation:

$$\left(\sum_\beta \left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_\beta}\right]_{x=\varphi}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=\left(\frac{\partial(\mathfrak{A}\tilde{f}_i)}{\partial x_\alpha}\right).$$

Die Matrix linker Hand hat mindestens den Defekt 2, da ihr erster Faktor ihn hat; die Matrix rechter Hand aber hat, wegen Hilfssatz 1, denselben Defekt wie $\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_k}\right)$, d. h. genau den Defekt 1, wofern $\mathfrak{A}\neq 0$ ist. Mithin bleibt keine andere Möglichkeit, als daß $\mathfrak{A}$ verschwindet, *q. e. d.*

---

[1]) Journ. f. Math. 82, „Über das Pfaffsche Problem, S. 242. [2]) Man vergleiche die Arbeit von *Ed. Weyr*, Monatshefte f. Math. u. Ph. Bd. 1, S. 178 *Weyr* bemerkt dort, daß es ihm nicht gewiß sei, ob etwa *Sylvester* in John Hopkins Cirkular den Satz veröffentlicht habe; in der Tat findet sich der Satz in Bd. III, 9—12 des genannten Cirkulars, wie ich aus Fortschritte d. Math. 15 S. 107 f. ersehe.

Spezialsatz 5. Sind die f_i abhängige quadratische Formen, die der Annahme A genügen und sind die ψ_i ebenfalls quadratisch, sind also, kurz gesagt, die Voraussetzungen von Spezialsatz 1 erfüllt, und ist die Anzahl p der Variabeln ungerade, so ist $\mathfrak{A}=0$, $f_i(\varphi,\varphi)=0$; es gilt somit auch alles im Spezialsatz 3 Gesagte.

Obgleich dieser Satz, wie auch die Sätze des vorigen Paragraphen, hier zunächst nur zu dem Zwecke abgeleitet sind, um den Fall von fünf abhängigen quadratischen Formen von fünf Variabeln vollständig behandeln zu können, scheint er doch über diesen Zweck hinaus ein etwas allgemeineres Interesse zu besitzen, und es möge daher noch das folgende über seine Bedeutung bemerkt werden.

Dem eben gegebenen Beweise nach könnte man auf die Vermutung kommen, daß es nur an der Mangelhaftigkeit und Umständlichkeit dieses Beweises liegt, wenn sich Spezialsatz 5 nur für ungerades p ergeben hat, daß er vielmehr in Wahrheit auch für gerades p gilt und sich daher auch überhaupt einfacher beweisen lassen müßte; und man könnte an einer solchen Vermutung vielleicht auch dann noch festhalten, wenn man bemerkt hat, daß für die niedrigste gerade Variabelnzahl, die in Betracht kommt, für $p=4$, Spezialsatz 5 durchaus nicht gilt, sondern daß beim 4. Fall von 4 quadratischen Formen mit 4 Variabeln: x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_2x_3 die Größen

$$\varphi_1=x_1,\ \varphi_2=x_2,\ \varphi_3=-x_3,\ \varphi_4=-x_4$$

unabhängig sind, sodaß zwischen ihnen keine Gleichung wie $f_i(\varphi)=0$ bestehen kann.

Es würde daher nicht ganz müßig sein, ein Beispiel von 6 Formen mit 6 Variabeln anzugeben, welches Spezialsatz 5 auch für $p=6$ widerlegt; es ist mir nun gelungen, ein solches zu finden, und es ließen sich leicht ähnliche für $p=8, 10, \cdots$ bilden; es ist das folgende:

$$\begin{array}{l|l|l}
f_1=x_2x_6-x_3x_5+\alpha x_2x_3 & \psi_1=f_4 & \\
f_2=x_3x_4-x_1x_6+\beta x_3x_1 & \psi_2=f_5 & \alpha+\beta+\gamma=0 \\
f_3=x_1x_5-x_2x_4+\gamma x_1x_2 & \psi_3=f_6 & u=\sum_{i=1}^{6}u_ix_i \\
f_4=x_1u & \psi_4=f_1 & \\
f_5=x_2u & \psi_5=f_2 & f_1f_4+f_2f_5+f_3f_6\equiv 0. \\
f_6=x_3u & \psi_6=f_3 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1&=x_1(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)\\
\varphi_2&=x_2(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)\\
\varphi_3&=x_3(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)\\
\varphi_4&=-x_4(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)-2x_1(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)+2x_1(\gamma u_5x_2-\beta u_6x_3)\\
\varphi_5&=-x_5(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)-2x_2(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)+2x_2(\alpha u_6x_3-\gamma u_4x_1)\\
\varphi_6&=-x_6(u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3)-2x_3(u_1x_1+u_2u_2+u_3x_3)+2x_3(\beta u_4x_1-\alpha u_5x_2)
\end{aligned}$$

Daß diese Formen φ_i unabhängig sind, erkennt man sehr leicht, wenn man bedenkt, daß sie bei willkürlichen $u_1, \cdots, u_6$; α, β, γ $(\alpha+\beta+\gamma=0)$ unabhängig sein werden, falls sie es nur für irgend welche speziellen Werte von $u_1, \cdots, u_6$; α, β, γ sind, für die $\alpha+\beta+\gamma=0$ ist. Sei nun $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$, so haben die φ_i den Faktor $u_4x_1+u_5x_2+u_6x_3$ gemein, und da sie, von diesem Faktor befreit, offenbar unabhängig sind, sind sie es nach Hilfssatz 1 auch mit diesem Faktor, und daher also auch ganz allgemein.

§ 7. Anwendung auf fünf abhängige quinäre quadratische Formen.

Als erste Eventualität hat man, wie schon ähnlich bei den ternären und quaternären Formen, die, daß zu vier abhängigen quadratischen Formen von fünf Variabeln eine willkürliche fünfte gestellt wird, und daß von diesen fünf Formen irgend fünf (linear unabhängige) Verbindungen genommen werden. Damit sind die Fälle aber auch alle aufgezählt, für die die Annahme A nicht zutrifft; diese kann also im folgenden wieder vorausgesetzt werden.

Die ψ_i können hier bis zum Grade 4 aufsteigen. $\beta = 0$ und $\beta = 1$ führen nur zu linearer Dependenz; sind andererseits die φ_i Konstanten, so gibt Satz 4 alles Notwendige. Es bleiben also nur die Möglichkeiten

1. ψ_i quadratisch , φ_i quadratisch , $\theta = constans$
2. φ_i linear

zu behandeln.

Erste Möglichkeit: $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Da die Annahme A gemacht werden darf und da sie bei $\beta = 2$, wie zu Beginn von § 6 erörtert, B zur Folge hat, so können alle Sätze von § 5 und § 6 angewendet werden; und da $p = 5$ ungerade ist, tritt Spezialsatz 5 und somit auch Spezialsatz 3 in Kraft. Ferner, da die φ_i quadratisch sind, sind in (17) die Größen $\mathfrak{N}_k$ Konstanten; substituiert man in (19) für die Variabeln x_i die Größen φ_i, so folgt wegen $\varphi_i(\varphi) = 0$, daß die rechte Seite verschwindet; mithin tut es auch die linke, es ist $\Sigma \mathfrak{N}_i \varphi_i = 0$; die abermalige Anwendung von (19) selbst ergibt dann $\Sigma \mathfrak{N}_\alpha x_\alpha = 0$, und da die $\mathfrak{N}_\alpha$ Konstanten sind, $\mathfrak{N}_\alpha = 0$ und weiter

$$(S) \qquad \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

$$(T) \qquad D(\varphi_i) = 0.$$

(S) besagt, daß $\cdot\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right)$ mindestens den Defekt 3 hat, daß also mindestens je drei der fünf Formen φ_i abhängig sind. Die φ_i sind quadratische Formen; die Resultate von § 3 werden daher anwendbar und lehren, daß entweder die fünf φ_i sich aus zweien linear zusammensetzen (I), oder aber in Linearfaktoren zerfallen, die ihrerseits sich alle aus zweien, etwa $a(x)$ und $b(x)$, komponieren (II).

Da die φ_i sich den x_i kongruent transformieren, darf angenommen werden, daß im Falle I $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ verschwinden, im Falle II nur φ_4 und φ_5.

Im Falle *I* hat man

$$\varphi_1 \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} = 0;$$

$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}$ sind linear, φ_1, φ_2 quadratisch; die φ_i haben mithin einen Faktor gemein, während sie ihrer Definition nach teilerfremd sind.

Im Falle *II* sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei linear unabhängige Verbindungen von a^2, ab, b^2; mithin lassen sich auch a^2, ab, b^2 aus ihnen linear zusammensetzen; daher folgt aus (T), daß

$$D(a^2) = 0, \qquad D(ab) = 0, \qquad D(b^2) = 0$$

ist, und da mit einer Funktion u auch jede Funktion von u Integral der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung $D(u) = 0$ ist, so ist auch $D(\sqrt{a^2})$ oder $D(a) = 0$, ebenso $D(b) = 0$, d. h. es ist

$$\sum \varphi_i \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum \varphi_i \frac{\partial b(x)}{\partial x_i} = 0.$$

Dies wären erneute lineare Relationen zwischen den φ_i und würde auf Fall *I* zurückführen, es sei denn, daß $\Sigma a_i \varphi_i = 0$, $\Sigma b_i \varphi_i = 0$ gar keine Relationen zwischen den Formen φ_1, φ_2, φ_3 bedeuten, d. h. daß $a(x)$, $b(x)$ beide nur x_4, x_5 enthalten, sodaß φ_1, φ_2, φ_3 binäre Formen von x_4, x_5 sind, und zwar linear unabhängige. Man berechnet dann leicht, daß es außer ${x_4}^2$, $x_4 x_5$, ${x_5}^2$ und ihren linearen Verbindungen nur noch zwei linear unabhängige Integrale f, g von $D(u) = 0$ gibt; damit hat man zwar fünf abhängige quinäre quadratische Formen; aber es sind schon drei von ihnen unter sich abhängig, die Annahme *A* ist für sie nicht erfüllt.

Zweite Möglichkeit: $\alpha = 1$.

a. **Hauptfall:** $\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}\right)$ ist vom Defekt 1. Die Untersuchung soll zunächst für beliebiges p durchgeführt werden. Nach Spezialsatz 4 ist $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| = 0$, $\varphi_i(\varphi) = \rho x_i$; ρ, eine Konstante, darf $= 1$ gesetzt werden, da es bei der Definition der φ_i auf einen konstanten Faktor nicht ankommt. Bekanntlich kann man durch lineare, kongruente Transformationen der x_i und φ_i eine lineare Substitution, deren Iterierte die identische Substitution ist, auf die Form

$$\varphi_i = \varepsilon_i x_i \qquad ({\varepsilon_i}^2 = 1)$$

bringen.

Daß alle ε_i das gleiche Zeichen haben, d. h. daß alle $= +1$ oder alle $= -1$ sind, wäre absurd; es wäre dann

$$0 = \sum \varphi_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = \pm \sum x_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad f_\alpha = 0.$$

Sei also etwa

$$\varepsilon_{\alpha_1} = \cdots = \varepsilon_{\alpha_q} = +1 \quad , \quad \varepsilon_{\beta_1} = \cdots = \varepsilon_{\beta_{p-q}} = -1,$$

so ist jede Form $x_{\alpha_\mu} x_{\beta_\nu} \begin{pmatrix} \mu = 1, \cdots, q \\ \nu = 1, \cdots, p-q \end{pmatrix}$ eine Integralform von

$$D(u) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{2}$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß jede quadratische Integralform f dieser linearen homogenen partiellen Differentialgleichung sich aus den eben angegebenen $q(p-q)$ Integralformen linear zusammensetzt.

f wird sich nämlich zerspalten lassen in ein Aggegrat u von lauter Gliedern der Form $c x_{\alpha_\mu} x_{\beta_\nu}$ und einen von solchen Termen freien Rest v. u und damit auch $v = f - u$ ist wiederum ein Integral von $D = 0$. v enthält nur noch Glieder der Gestalt $a x_{\alpha_\mu} x_{\alpha_\nu}$ und $b x_{\beta_\mu} x_{\beta_\nu}$. Nun ist

$$D(a x_{\alpha_\mu} x_{\alpha_\nu}) = a D(x_{\alpha_\mu} x_{\alpha_\nu}) = 2 a x_{\alpha_\mu} x_{\alpha_\nu}$$
$$D(b x_{\beta_\mu} x_{\beta_\nu}) = b D(x_{\beta_\mu} x_{\beta_\nu}) = 2 b x_{\beta_\mu} x_{\beta_\nu};$$

aus derartigen Termen wird $D(v)$ sich zusammensetzen; jeder wird höchstens einmal auftreten, kann sich daher nicht gegen einen anderen wegheben; somit müssen, da $D(v) = 0$ sein soll, alle Koeffizienten a und b einzeln verschwinden, es ist also $v = 0$, *q. e. d.*

Spezialsatz 6. Sind die f_i quadratisch, die φ_i linear und unabhängig, so kann man es durch eine lineare Transformation der x_i stets erreichen, daß die f_i sich aus den Formen

$$x_{\alpha_\mu} x_{\beta_\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, \cdots, q \\ \nu = 1, \cdots, p-q \end{pmatrix}$$

linear zusammensetzen, wo $\alpha_1, \cdots, \alpha_q, \beta_1, \cdots \beta_{p-q}$ eine willkürliche, aber fest gewählte Permutation der Indices $1, \cdots, p$ bedeutet.

$q = 1$ (oder, was dasselbe ist, $q = p - 1$) führt danach nur zu $p-1$ Integralen f_i, interessiert daher nicht. Somit bleibt für $p = 5$ nur der eine Fall

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = -1;$$
$$x_1 x_4, \; x_2 x_4, \; x_3 x_4; \; x_1 x_5, \; x_2 x_5, \; x_3 x_5$$

sind die Integrale; nimmt man irgend fünf lineare Verbindungen von ihnen, so hat man einen Fall von fünf abhängigen quinären quadratischen

Formen vor sich, und so erhält man eine ganze Klasse von solchen Fällen — die einzigen, die sich außer den unmittelbar einleuchtenden und bald anfangs erwähnten ergeben haben. Das folgende wird ihnen auch keinen weiteren hinzufügen.

Auch über diese Fälle könnten noch Zweifel entstehen, d. h. darüber, ob nicht etwa alle diese Fälle ebenfalls in jenen gewissermaßen trivialen Fällen enthalten sind, daß also, wie man auch fünf lineare, linear unabhängige Verbindungen der obigen sechs Integrale wählen mag, die zugehörigen ψ_i stets linear abhängig sind. Ein Beispiel beweist das Gegenteil. Freilich darf man nicht irgend 5 jener 6 Formen selbst nehmen; nimmt man jedoch

$$x_1x_4,\ x_3x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_2x_4 + x_3x_5,$$

so ermittelt man durch Ausrechnung $\theta = constans$ die ψ_i werden kubisch und linear unabhängig. Damit ist bewiesen, daß die erhaltene Klasse von Fällen nicht ganz in den schon bekannten Klassen enthalten ist.

Aber auch diese eine Klasse von neuen Fällen ist noch sozusagen verkümmert. Sei nämlich $\varphi_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} x_\beta$, so folgt aus (2) durch successive Differentiation

$$2\sum_\alpha a^{(i)}_{\alpha\beta}\,\varphi_\alpha + \sum_\alpha p_{\alpha\beta}\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$2\sum_\alpha a^{(i)}_{\alpha\beta}\,p_{\alpha\gamma} + 2\sum_\alpha p_{\alpha\beta}\,a^{(i)}_{\alpha\gamma} = 0;$$

ist $A_i = (a^{(i)}_{\alpha\beta})$, $P = (p_{\alpha\beta})$, so kann man kurz schreiben:

$$A_i P + P A_i = 0,$$

d. h. $A_i P$ ist eine schiefe Matrix, also von geradem Range. Ist also $|P| \neq 0$, wie bei dem „Hauptfall" vorausgesetzt wird, und ist p ungerade, so ist $|A_i| = 0$ $(i=1, \cdots, p)$, alle f_i sind defekt, und auch jede lineare Verbindung von ihnen.

Aus der hergeleiteten kanonischen Darstellung erhellt auch unmittelbar, daß die f_i bei ungeradem p höchstens $\frac{p-1}{2}$-teilig sind, also defekt. Nur bei geradem p ergibt sich neben einer Reihe solcher Fälle von defekten Formen auch eine Klasse von Hauptfällen nicht defekter Formen, wie der im Falle $p = 4$ im Paragraph 4 genauer beschriebene, der dort auf anderem Wege hergeleitet wurde.

Zusatz zu Spezialsatz 6. Bei ungeradem p sind in den Fällen von Spezialsatz 6 alle f_i defekte Formen.

b. Ausnahmefälle: $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]_{x=\varphi}$ ist vom Defekt 2, $\theta(\varphi)$. $\psi_i(\varphi) \cdot \varphi_k(\varphi) = 0$.

Ist θ eine Konstante, und nur ein $\varphi_k(\varphi) \not\equiv 0$, so verschwinden alle $\psi_i(\varphi)$. Entweder sind also alle $\varphi_k(\varphi) = 0$, oder alle $\psi_i(\varphi) = 0$, oder θ ist keine Konstante und $\theta(\varphi) = 0$. Ist θ eine Linearform, sind also die ψ_i quadratisch, so ist, wie Spezialsatz 5 und 3 ergeben, sowohl $\varphi_k(\varphi) = 0$ als auch $\psi_i(\varphi) = 0$. Ein θ von höherem Grade würde lineare oder konstante ψ_i ergeben, also nur zu linearer Dependenz der f_i führen. Also kann gesagt werden, daß in den noch zu behandelnden Fällen entweder alle $\psi_i(\varphi)$ verschwinden, oder alle $\varphi_k(\varphi)$.

Die φ_i dürfen daher als mindestens zweifach abhängig und weil sie linear sind, als zweifach linear abhängig angesehen werden, man kann es durch lineare Transformationen der x_i erreichen, daß $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$ ist.

Nunmehr scheidet sich die Untersuchung in zwei Fälle:

1. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind noch einmal linear abhängig, es darf auch $\varphi_3 = 0$ gesetzt werden,
2. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind linear unabhängig.

ad 1. In jeder quadratischen Form von x_3, x_4, x_5 allein hat man ein Integral der Differentialgleichung

$$D(u) \equiv \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \tag{2}$$

Dies liefert 6 linear unabhängige Integrale; diese aber führen zu keinem neuen Fall, da je vier von ihnen unter sich abhängig sind. Um einen neuen Fall zu erhalten, wäre es vielmehr notwendig, noch mindestens zwei linear unabhängige andere Integrale zu besitzen. Denn gäbe es nur eines, f, und nähme man 5 willkürliche lineare Verbindungen von f und den 6 Formen $f_1, \cdots, f_6$, etwa $f_1', \cdots, f_5'$, so könnte man von diesen $f_1', \cdots, f_5'$ alsbald wieder zu 5 linear unabhängigen Verbindungen von ihnen übergehen, von denen vier f garnicht enthalten, d. h. nur von x_3, x_4, x_5 abhängen, also unter sich abhängig sind.

Existieren aber zwei verschiedene, von x_3, x_4, x_5 freie Integrale f, g, so überzeugt man sich, indem man f und g ansetzt, leicht, daß φ_1, φ_2 sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden können, daß also die φ_i nicht teilerfremd sind.

ad 2. Man kann hier ein ähnliches Verfahren einschlagen. Außer x_4^2, $x_4 x_5$, x_5^2 braucht man mindestens drei linear unabhängige Integrale f, g, h. Da nun φ_1, φ_2, φ_3 als linear unabhängig vorausgesetzt werden, ist $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right)$ vom Defekt 2, also $A_i P$ höchstens vom Range 3, also, weil alternierend, nur vom Range 2, und da $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right)$ nur den Defekt 2 hat, ist $|A_i| = 0$, d. h. jedes Integral f von $D(u) = 0$ ist defekt. Sei f nun ein keines der Glieder x_4^2, $x_4 x_5$, x_5^2 enthaltendes Integral, so muß nicht nur seine Diskriminante verschwinden, sondern auch die von $f + \alpha x_4^2 + \beta x_4 x_5 + \gamma x_5^2$, für jedes Wertsystem α, β, γ. Man folgert daraus, daß auch die Diskriminante des nur x_1, x_2, x_3 enthaltenden Teiles von f verschwindet. Gestützt auf diese Kenntnis, findet man keine Schwierigkeiten mehr, f, g, h anzusetzen und einzusehen, daß φ_1, φ_2, φ_3 sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, wofern f, g, h linear unabhängig sind.

Gesamtergebnis für quinäre quadratische Formen:

1. *lineare Abhängigkeit,*
2. *fünf Formen mit gemeinsamer singulärer Stelle,*
3. *fünf willkürliche lineare Verbindungen von fünf Formen, von denen vier unter sich abhängen,*
4. *fünf willkürliche lineare Verbindungen der sechs Formen*

$$x_1x_4,\ x_2x_4,\ x_3x_4;\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_3x_5.$$

§ 8. Weitere allgemeine Sätze über p abhängige Formen n^{ten} Grades von p Variabeln.

Es sollen am Ende dieses ersten Teiles der Arbeit noch einige analytische Sätze allgemeiner Art abgeleitet werden, die nicht nur quadratische Formen betreffen, sondern p abhängige Formen von p Variabeln und beliebigem Grade n, und deren geometrische Analoga im zweiten Teil zu erörtern sein werden.

Seien p Formen $f_1, \ldots, f_p$ der p Variabeln $x_1, \ldots, x_p$ vorgelegt, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, und für die die Annahmen A und B erfüllt sind. Dann stehen die f_i zu den ψ_i, wie Satz 6 besagt, in einem reziproken Verhältnis; setzt man die Minoren der Funktionalmatrix der ψ_i in der Form $\overline{\theta}\overline{\varphi_i}\overline{\psi_k}$ an, so sind die $\overline{\psi_k}$ nichts anderes als die f_i. Dagegen sind nicht notwendig die $\overline{\varphi_i}$ mit den φ_i identisch, wie sich weiterhin zeigen wird.

Die Relationen

$$(2)\qquad D(f_\alpha) \equiv \sum_i \varphi_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0,\quad \overline{D}(\psi_\alpha) \equiv \sum_i \overline{\varphi_i} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, p)$$

kann man auch dahin interpretieren, daß alle f_α Integrale einer und derselben homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichung 1. O. $D = 0$, sind, und ähnlich die ψ_i. Hat man umgekehrt p Formen von p Variabeln, welche Integrale einer und derselben homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichung 1. O. $D(u) = 0$ sind, so verschwindet ihre Funktionaldeterminante offenbar identisch. Daher kann man die in der vorliegenden Arbeit behandelte Frage auch ansehen als eine Frage über die Integration der allgemeinen homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichung 1. O. durch ganze, homogene Funktionen.

Ist u ein Integral von $D(u) = 0$, so genügt auch jede Funktion von u dieser selben Differentialgleichung. Ebenso ist eine Funktion mehrerer Integrale wieder ein Integral.

Nun ist wegen (3):

$$\frac{\psi_\alpha}{\psi_\beta} = \frac{\partial \omega}{\partial f_\alpha} : \frac{\partial \omega}{\partial f_\beta},$$

also darstellbar als Funktion von $f_1, \cdots, f_p$, daher ein Integral von $D = 0$; also:

Satz 7. Der Quotient irgend zweier der Formen ψ_i ist ein Integral der homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichung

$$D \equiv D(u) \equiv \sum_i \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

welcher die f_i genügen und welche auch, unter der Annahme A, durch die f_i eindeutig bestimmt ist.

Es ist dies nichts als ein sehr bekannter Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen. Denn die Größen $\theta\,\psi_i$ sind Multiplikatoren der Differentialgleichung $D = 0$ und bekanntlich ist der Quotient zweier Multiplikatoren stets ein Integral der Differentialgleichung.

Definition. Zwei homogene, lineare, partielle Differentialgleichungen 1. O.

$$A(u) \equiv \sum_i A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad B(u) \equiv \sum_i B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

sollen syzygetisch genannt werden, wenn die Matrix

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_p \\ A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_p \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_p \end{vmatrix}$$

den Rang 2 hat.

Ist f ein gemeinsames Integral von $A = 0$ und $B = 0$, und sind $A = 0$, $B = 0$ verschiedene Differentialgleichungen, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdot \cdot \cdot \cdot, \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

eine Lösung der beiden verschiedenen linearen homogenen Gleichungen, als die man $A = 0$, $B = 0$ ansehen kann. Sind überdies A und B syzygetische Differentialausdrücke, und setzt man

$$E(u) \equiv \sum x_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

so ist also auch $E(f) = 0$, d. h., wenn f eine homogene Funktion ist, f ist von der 0ten Dimension.

Satz 8. Haben zwei syzygetische Differentialgleichungen eine homogene Funktion zum gemeinsamen Integral, die nicht 0ter Dimension ist, so sind sie identisch.

Ebenso unmittelbar ergibt sich aus der Definition:

Satz 9. Haben zwei homogene, lineare Differentialgleichungen $A = 0$, $B = 0$ *eine homogene Funktion* 0ter *Dimension zum gemeinsamen Integral, so sind sie syzygetisch.*

Nun ist $\frac{\psi_\alpha}{\psi_\beta}$, unter α, β irgend zwei ganze, positive Zahlen aus der Reihe $1, \cdots, p$ verstanden, einerseits ein Integral von $D = 0$, andererseits, wie bewiesen, von $\overline{D} = 0$, und schließlich eine homogene Funktion 0ter Dimension. Es folgt:

Satz 10. Die beiden Differentialgleichungen $D = 0$ *und* $D = 0$ *sind syzygetisch.*

Es sei noch einiges über die Frage bemerkt, ob D und $\overline{D}$ etwa stets identisch sind. Mit Hilfe einer bekannten Identität von *Jacobi* kann man ein sehr einfaches Kriterium herleiten, aus den Koeffizienten von D allein schon zu erkennen, ob D mit D übereinstimmt. Man erhält dabei die folgenden Ergebnisse, die hier nur kurz angeführt werden mögen.

Satz 11. Das identische Verschwinden des Ausdrucks

$$\operatorname{div}(\theta\varphi) \equiv \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial(\theta\varphi_i)}{\partial x_i}$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß D *und* D *identisch sind. Die Formen* $\overline{\varphi_i}$ *sind stets vom selben Grade* α*, wie die Formen* φ_i*.*

Ein Beispiel, in dem $div\ (\theta\varphi) \not\equiv 0$ ist, also D und D verschieden sind, ist nicht leicht anzugeben; im ternären Gebiet ($p = 3$) existiert keines. Mir ist nur das in § 7 zu anderem Zwecke angegebene bekannt:

$$x_1 x_4,\ x_3 x_4,\ x_1 x_5,\ x_2 x_5,\ x_2 x_4 + x_3 x_5,$$

bei dem

$$\varphi_1 = x_1,\ \varphi_2 = x_2,\ \varphi_3 = x_3,\ \varphi_4 = -x_4,\ \varphi_5 = -x_5$$

$\theta = 1$, also $\operatorname{div}(\theta\varphi) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 1 \not\equiv 0$ ist.

Zusatz. Der Satz, daß D *und* $\overline{D}$ *stets identisch sind, ist nicht richtig.*

Zweiter Teil.

§ 9. Der Satz von Pasch und sein Analogon für Formen von mehr als drei Variabeln.

Nachdem im Vorangehenden die Untersuchung der quadratischen Formen bis zu $p = 5$ durchgeführt worden ist, nachdem sich dabei die Aussicht eröffnet hat, daß zwar bei ungeradem p eine verhältnismäßig geringe Anzahl von Fällen existieren dürfte, bei geradem p jedoch eine große Mannigfaltigkeit, deren vollständige Aufsuchung daher erneute Schwierigkeiten zu bieten scheint, soll in der bisher verfolgten Richtung nicht weiter fortgeschritten werden. Vielmehr sollen jetzt eine Reihe allgemeinerer Sätze aufgestellt werden, die nicht nur an sich einige recht enge Beziehungen zwischen Formen ergeben, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, sondern die auch einen Einblick in die bisher angewandten, oft willkürlich erscheinenden Methoden und Sätze gestatten, insofern sie diese Sätze, insbesondere die von § 5, als Spezialfälle ganz einfacher allgemeiner Tatsachen erscheinen lassen.

Dabei sollen der größeren Übersichtlichkeit halber auch geometrische Ausdrucksweisen und Vorstellungen nicht verschmäht und der heuristische Charakter der Betrachtung in den Vordergrund gestellt, die Mittel zur algebraischen Durchführung stellenweise nur kurz angedeutet werden.

Die bisher (§§ 2—8) angestellten Erörterungen haben den Satz von *Pasch* ganz außer acht gelassen; es wurde nirgends die Frage gestellt, ob sich denn die von *Pasch* beim Beweise seines Satzes verwandten Methoden nicht auch auf Formen von mehr als drei Variabeln anwenden lassen, und in welcher Beziehung diese Methoden zu den von uns benutzten stehen; ob ferner die erhaltenen Resultate sich zusammenfassen lassen in ein naheliegendes Analogon zum Satze von *Pasch* oder nicht.

Das nächstliegende Analogon zum Satz von *Pasch* wäre wohl dieses:

„daß p Formen $f_1, \cdots, f_p$ von p Variabeln, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, sich als ganze, rationale Verbindungen von höchstens $p-1$ Formen $u_1, \cdots, u_{p-1}$ derselben p Variabeln darstellen lassen."

An dem Beispiel

(a) $\qquad f_1 = x_1 x_3,\ f_2 = x_1 x_4,\ f_3 = x_2 x_4,\ f_4 = x_2 x_3$

erkennt man leicht, daß ein derartiges Analogon nicht richtig ist, selbst dann nicht, wenn man zuläßt, daß die Formen $u_1, \cdots, u_{p-1}$ verschiedenen Grades sind.

Andererseits scheinen die Hilfsmittel, die *Pasch* bei seinem Beweise benutzt, sich nicht ohne weiteres auf Formen von mehr als drei Variabeln anwenden zu lassen.

Es soll daher im folgenden versucht werden, den Satz von *Pasch* auf eine andere Weise zu begründen, derart, daß Formen von mehreren Variabeln sich nach derselben Methode behandeln lassen, und daß sich so ein Analogon zu diesem Satze ergibt; freilich wird dieses nicht hinreichen, die Formen von beliebig vielen Variabeln vollständig zu behandeln.

Satz 2 legt es nahe, die Veränderlichen x_i sowohl als auch die Größen φ_i — falls man sich zunächst auf das ternäre Gebiet beschränkt — als homogene Koordinaten in einer und derselben Ebene E, die f_i als Koordinaten der Punkte und die ψ_i als Koordinaten der Geraden einer zweiten Ebene F zu deuten. Die Formen $\Sigma c f_i$ bilden dann ein Netz von Kurven n^{ter} Ordnung in E, wenn man den Fall der linearen Abhängigkeit von f_1, f_2, f_3 ausschließt. Jedem Punkt x von E entspricht ein bestimmtes Wertsystem von f_1, f_2, f_3, das der Gleichung $\omega(f_1, f_2, f_3) = 0$ genügt, also ein Punkt von F, welcher auf der durch $\omega = 0$ dargestellten Kurve ν^{ter} Ordnung liegt; nur den Grundpunkten des Kurvennetzes in E entspricht kein bestimmtes Wertsystem f_1, f_2, f_3.

Besteht außer $\omega(f) = 0$ noch eine zweite irreduzible Relation zwischen f_1, f_2, f_3, $\sigma(f) = 0$, so hat σ wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität mit ω nur eine endliche Anzahl von Punkten gemein; indem man also x_1, x_2, x_3 unbeschränkt variiert, würde f_1, f_2, f_3 auf endlich viele Wertsysteme beschränkt sein, d. h. f_1, f_2, f_3 müßten Konstanten proportional sein.

In der Tat: wenn $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|$ den Rang 1 hat, unterscheiden sich je zwei f_i nur um einen konstanten Faktor, und die beiden identischen Relationen, die dann zwischen f_1, f_2, f_3 bestehen, sind lineare.

$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$ mag daher vom Range 2 angenommen werden. Dann entspricht einem unbestimmten Punkte von ω umgekehrt eine ganze Kurve g etwa μ^{ter} Ordnung in E[1]), welche nicht irreduzibel zu sein braucht. Man hat in E ein System (g) von solchen Kurven g, welche E ganz und zwar einfach überdecken; denn in einem unbestimmten Punkte x von E haben die f_i ganz bestimmte Werte; durch einen unbestimmten Punkt x von E geht daher eine und nur eine Kurve g dieses Systems (g). Dieses System (g) ist mithin ein Kurvenbüschel.[2])

Den Punkten einer Kurve $\Sigma c_i f_i = 0$ in E entsprechen offenbar die Schnittpunkte der Gerade $\Sigma c_i f_i = 0$ (in F) mit der Kurve $\omega = 0$, und bei unbestimmten c_1, c_2, c_3 ist die Zahl dieser Schnittpunkte gleich der Ordnung ν der Kurve ω. D. h. jede Kurve $f \equiv \Sigma c_i f_i = 0$ besteht aus ν Kurven μ^{ter} Ordnung g des Büschels (g), d. i. der Satz von *Pasch*. Auch $\mu\nu = n$ ist zugleich evident.

Diese eben angewandte Methode beansprucht freilich zu ihrer exakten Durchführung viel kompliziertere Hilfsmittel als der von *Pasch* gegebene Beweis, läßt sich dagegen ohne weiteres auf p (einfach) abhängige Formen von p Variabeln anwenden. Der größeren Anschaulichkeit wegen mag $p = 4$ gesetzt werden.

An Stelle von E tritt dann der dreidimensionale Raum, statt F ein anderer — anschaulich natürlich derselbe, nur daß von seiner Identität mit E kein Gebrauch gemacht werden wird —, statt des Kurvennetzes ein Gewebe von ∞^3 Flächen n^{ter} Ordnung, statt der Kurve ω eine Fläche ω. Den Punkten einer Fläche $f \equiv \Sigma c_i f_i = 0$ entspricht der Schnitt von ω mit der Ebene $\Sigma c_i f_i = 0$ (im Raume F). Jeder Punkt von ω ist der entsprechende für eine ganze Kurve g von Punkten in E; das System dieser zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von Kurven g überdeckt E wiederum einfach, d. h. ein unbestimmter Punkt von E gehört einer und nur einer Kurve g an.

Jede Fläche $f = \Sigma c_i f_i = 0$ wird von einfach unendlich vielen solchen Kurven g erzeugt, deren entsprechende Punkte auf ω den

1) Die exakte algebraische Begründung dieser Aussage ist gewährleistet durch die Hilfsmittel der neueren algebraischen Untersuchungen, zu denen *Kroneckers* „Festschrift“ den Grund gelegt hat. Insbesondere der *Kroneckersche* Irreduzibilitätssatz (vgl. *König*, Allgemeine Theorie der algebraischen Größen, S. 221) und der „Fundamentalsatz der Abbildungstheorie“ (a. a. O. S. 233) enthalten die notwendigen Hilfsmittel hierfür.

2) Auch dieser den Geometern geläufige Satz ist mit Hilfsmitteln der Analysis unschwer zu beweisen.

Schnitt von ω mit $\Sigma c_i f_i = 0$ erfüllen. Der Grundkurve eines Büschels $f' + \lambda f'' \equiv \sum_i (c'_i + \lambda c''_i) f_i = 0$ entsprechen, soweit sie nicht allen Flächen f des Gewebes angehört, die ν Schnittpunkte von ω mit der Axe des Ebenenbüschels, das durch $f' \equiv \Sigma c'_i f_i = 0$ und $f'' \equiv \Sigma c''_i f_i = 0$ konstituiert wird. Sei π die Ordnung der in richtiger Vielfachheit gezählten etwaigen Grundkurve des Gewebes der Flächen f, so folgt:

$$\text{(I)} \qquad n^2 = \mu\nu + \pi.$$

Als Analogon zum Satze von Pasch für vier Variable stellt sich daher die Beziehung dar, daß die ∞^3 Flächen $f \equiv \Sigma c_i f_i = 0$ sich aus den Kurven einer zweifach ausgedehnten Kurvenschar (g) erzeugen lassen, welche den Raum einfach überdeckt.

Das in diesem Paragraph schon einmal zitierte Beispiel (a) illustriert diesen Satz in sehr einfacher Weise. Die f sind dort die ∞^3 Flächen 2. O., welche zwei windschiefe Geraden l_1, l_2 gemein haben; diese Flächen werden erzeugt von den ∞^2 Treffgeraden von l_1 und l_2; das System dieser Treffgeraden ist das System (g); daß durch jeden Raumpunkt genau eine solche Gerade g hindurchgeht, ist unmittelbar evident. Auch ist

$$n^2 = \mu\nu + \pi$$

$$\text{d. h. } 2^2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1. \; —$$

Die Formeln (12) und (12a) finden durch die hier benutzten Vorstellungen eine einfache Deutung; sie besagen, daß die Grundkurven g — eventuell also in einem höherdimensionalen Raume — gerade Linien sind, eine Besonderheit, die demnach bei quadratischen Formen stets eintritt, wenn die ψ_i nur einfach abhängig sind (Annahme B); auch der Grund dieser letzteren Einschränkung B, die in § 5 so unvermittelt notwendig wird, wird weiter unten anschaulich hervortreten. In den von *Gordan* und *Noether* behandelten Spezialfällen sind die Grundkurven g ebenfalls stets Geraden, während die Annahme B bei ihnen gerade niemals erfüllt ist. Die von *Gordan* und *Noether* behandelten Fälle sind aber nicht die einzigen, in denen die Kurven g gerade Linien sind; Beispiel (a) lehrt eben das Gegenteil.

Das gefundene Analogon zum Satze von *Pasch* reicht offenbar nicht aus, um die Aufgabe für $p > 3$ mit ähnlicher Vollständigkeit zu lösen, wie es jener Satz für $p = 3$ tut. Denn während in der Ebene ein System von Kurven, das die Ebene einfach überdeckt,

nur ein Büschel sein kann, ist es von einem den Raum einfach erfüllenden System von Kurven μ^{ter} Ordnung, ja auch nur von Geraden ($\mu = 1$) nicht leicht, Genaueres auszusagen[1]); und ist dies selbst möglich, so ist auch noch die Art, wie sich die Flächen f aus den Kurven g zusammensetzen, eine viel kompliziertere.

Immerhin enthält der obige Satz eine recht enge Beziehung zwischen den Flächen $f_1, \cdots, f_4$, eine Beziehung, wie sie sonst nur zwischen drei (willkürlichen) Flächen besteht, und gestattet eine Reihe von Anwendungen, sowie eine Ergänzung durch einige weitere allgemeine Sätze.

§ 10. Die geometrische Deutung der Differentialgleichung $D = 0$ und der zu ihr syzygetischen Differentialgleichungen, sowie der Formen ψ_i.

Die homogene, lineare, partielle Differentialgleichung 1. O.

$$D \equiv \sum \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

ordnet jedem Punkt x von E eine bestimmte, von ihm ausgehende Richtung zu, die der Verbindungslinie der Stelle x mit der Stelle $\varphi(x)$, und somit ein von x ausgehendes Linienelement. Indem man diese Linienelemente, in der in der Theorie der Differentialgleichungen und der Transformationsgruppen üblichen Weise zu Kurven zusammenfügt, erhält man eine den Raum E einfach erfüllende Kurvenschar, aus deren Kurven sich die Integralflächen von $D = 0$ zusammensetzen. Es ist dies die Schar (g) der Grundkurven, für die sich in der Differentialgleichung $D = 0$ eine exakte und angemessene analytische Definition darbietet.

Jede Differentialgleichung der Form $p(x)D(u) + q(x)E(u) = 0$ ordnet offenbar jedem Punkt x dasselbe Linienelement zu, bestimmt also dieselbe Kurvenschar, wie $D = 0$, und umgekehrt; also:

Die homogene, lineare, partielle Differentialgleichung 1. O. $D = 0$ bestimmt ein System von ∞^2 Kurven, das den Raum einfach erfüllt; alle zu $D = 0$ syzygetischen Differentialgleichungen bestimmen dieses selbe Kurvensystem, und umgekehrt ist jede homogene, lineare, partielle Differentialgleichung 1. O., die dieses Kurvensystem bestimmt, zu $D = 0$ syzygetisch.

In Anbetracht von Satz 10 folgt hieraus unmittelbar:

Satz 12. Die Flächen $\Sigma c_i \psi_i = 0$ lassen sich aus den Grundkurven g ebenso erzeugen, wie die Flächen $\Sigma c_i f_i = 0$.

[1]) vgl. z. B. *Sturm*, Liniengeometrie II, S. 31.

Bei gegebenen y ist $f_y(x) \equiv \sum_i f_i(x)\psi_i(y)$ eine lineare Verbindung der f_i. Sie hat die besondere Eigenschaft, daß für $x = y$ nicht nur, wegen (1a), f_y selbst, sondern auch, wegen (1),

$$\frac{\partial f_y}{\partial x_\alpha} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} \psi_i(y) \qquad (\alpha = 1, \cdots, 4)$$

verschwindet, daß also f_y in y einen singulären Punkt besitzt.

Ist ferner z ein Wert, für den die Größen $\psi_1(z), \cdots, \psi_4(z)$ sich verhalten wie die Größen $\psi_1(y), \cdots, \psi_4(y)$, so ist f_z, von einem konstanten Faktor abgesehen, dieselbe lineare Verbindung der f_i, wie f_y; die Wiederholung der vorhin angewandten Schlußweise ergibt, daß auch z eine singuläre Stelle von $f_y (\equiv f_z)$ ist. Nun gibt es mindestens ∞^1 Werte z, für die die $\psi_i(z)$ dieselben Verhältnisse haben, da die ψ_i mindestens einfach abhängig sind; und zwar haben, wie man aus Satz 12 leicht ersieht, die ψ_i längs der ganzen durch y hindurchgehenden Grundkurve $g(y)$ proportionale Werte, eventuell aber, wenn die ψ_i stärker als einfach abhängig sind (wenn Annahme B nicht zutrifft), längs einfach oder mehrfach unendlich vieler Grundkurven g.

Satz 13. Jede Grundkurve g ist singuläre Linie einer der Flächen $\Sigma c_i f_i = 0$; ist y irgend ein Punkt dieser Grundkurve g, so wird jene Fläche analytisch dargestellt durch $f_y \equiv \Sigma f_i(x)\ \psi_i(y) = 0$.

Das Bild von f_y auf ω wird eine ebene Kurve sein, die in dem y entsprechenden Punkte von ω einen Doppelpunkt hat, also von der Tangentialebene in diesem Punkte an ω ausgeschnitten wird. Hieraus folgt, daß zwischen den $\psi_i(x)$ die der Identität $\omega = 0$ adjungierte Identität (Tangentialgleichung der Fläche ω) $\Omega = 0$ besteht.

Satz 14. Zwischen den Formen ψ_i besteht die zur Gleichung $\omega = 0$ adjungierte Gleichung $\Omega = 0$.

Sind die ψ_i stärker als einfach abhängig, so enthält f_y mindestens eine ganze singuläre Fläche, ω hat nur ∞^1 Tangentialebenen (bezw. ∞^{p-3} bei p Variabeln), ist also eine abwickelbare Fläche.

Satz 15. Sind die ψ_i zweifach abhängig, so ist $\omega = 0$ eine abwickelbare Fläche.

Sind die f_i quadratisch, so kann f_y bekanntlich nur ein lineares System von singulären Punkten besitzen, d. h. entweder nur einen einzigen singulären Punkt, oder eine einzige singuläre Gerade, oder eine einzige singuläre Ebene u. s. f. Sind also die ψ_i nur einfach abhängig, hat f_y nur eine singuläre Linie, so ist diese notwendig eine gerade Linie, wie dies auch Spezialsatz 2 besagt. Es wird aber

zugleich hier sehr anschaulich, weshalb in Spezialsatz 2 die Voraussetzung hinzugefügt werden mußte, daß Annahme B gilt. Denn sind die ψ_i mehr als einfach abhängig, so werden die f_y ganze Ebenen oder noch ausgedehntere lineare Systeme von singulären Punkten haben. Die Grundkurven g werden dann diese singulären Ebenen bezw. Räume zusammensetzen; aber sie brauchen dazu selbst keine geraden Linien zu sein; in dem Beispiel, das sich als dritter Fall bei der Behandlung der Flächen 2. O. ergeben hat, sind sie Kegelschnitte.

§ 11. Bestimmung aller Systeme von vier einfach abhängigen quaternären Formen gleichen Grades n, zwischen denen eine quadratische Identität $\omega = 0$ vom Höchstrange 4 besteht.

Für die allgemeinen Betrachtungen der beiden letzten Paragraphen zu deren Illustration eine einfache Anwendung: ω sei eine eigentliche Fläche 2. O. Alsdann gewinnen die beiden auf ω gelegenen Scharen von geraden Linien, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, ein besonderes Interesse. Den Punkten einer solchen Gerade werden in E einfach unendlich viele Kurven g entsprechen, die eine Fläche erzeugen, eine Fläche also, die sich aus denselben Grundkurven zusammensetzt, wie die f_i, die also analytisch durch ein Integral einer zu $D = 0$ syzygetischen Differentialgleichung dargestellt wird. Da durch jeden Punkt von ω eine und nur eine Gerade der Schar $\mathfrak{S}_1$ hindurchgeht, wird also auch das Flächensystem, das den Geraden von $\mathfrak{S}_1$ in E entspricht, E einfach erfüllen; denn gesetzt, durch einen unbestimmten Punkt x von E gingen zwei solche Flächen, so müßten durch den entsprechenden Punkt von ω zwei Geraden von $\mathfrak{S}_1$ gehen. Jenes Flächensystem ist daher ein Flächenbüschel, B_1, und ebenso entsprechen den Geraden von $\mathfrak{S}_2$ die Flächen eines Büschels B_2 in E.

Es fragt sich nun, wie sich diese beiden Büschel B_1, B_2 zu den Flächen f verhalten. Unter den ebenen Schnitten von ω befinden sich auch die Schnitte von ω mit seinen Tangentialebenen, bestehend je aus einer Gerade aus $\mathfrak{S}_1$ und einer Gerade aus $\mathfrak{S}_2$. Die diesen ebenen Schnitten entsprechenden Flächen f werden also je aus einer Fläche von B_1 und einer Fläche von B_2 bestehen; umgekehrt ist jedes Paar einer Fläche von B_1 und einer Fläche von B_2 eine Fläche f.

Zugleich folgt, daß die Summe der Ordnungen b_1 und b_2 der Flächen von B_1 und B_2 gleich n ist.

Sei weiter f eine beliebige der Flächen $\Sigma c_i f_i$, so induziert der entsprechende ebene Schnitt (Kegelschnitt) auf ω in den beiden Geradenscharen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ eine projektive Beziehung: eine Gerade aus $\mathfrak{S}_1$ trifft ihn in einem Punkte; durch diesen Punkt geht genau eine

Gerade von $\mathfrak{S}_2$; so ordnen sich die Geraden von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ projektiv einander zu, und der Kegelschnitt kann als das Erzeugnis dieser Projektivität, d. h. als der Ort der Schnittpuukte entsprechender Geraden aus der einen und der anderen Schar angesehen werden.

Betrachtet man jetzt das Abbild dieser Verhältnisse im Raume E, so erkennt man, daß jede Fläche f als das Erzeugnis oder der Ort der Schnittkurven entsprechender Flächen aus B_1 und B_2 angesehen werden kann, „entsprechend“ in einer passenden projektiven Beziehung zwischen beiden Flächenbüscheln.

Spezialsatz Q. Man erhält sämtliche Fälle von vier einfach abhängigen quaternären Formen gleichen Grades n, zwischen denen eine quadratische Identität vom Höchstrange 4 besteht, indem man zwischen irgend zwei Flächenbüscheln (deren Ordnungen die Summe n haben) vier verschiedene projektive Beziehungen statuiert und die vier durch dieselben erzeugten Flächen (n^{ter} Ordnung) nimmt.

Es ist nicht minder leicht, dieses Ergebnis analytisch herzuleiten. Denn ist ω vom Range 4, so kann man ω durch eine lineare Substitution der f_i auf die Gestalt

$$\omega' \equiv f_1' f_3' - f_2' f_4'$$

bringen; man erkennt, wie dies oben in § 4 schon einmal näher ausgeführt worden ist, daß f_1', f_2', f_3', f_4' dann reduzibel sein müssen. Die Faktoren von f_1' werden sich auf f_2' und f_4' verteilen, die von f_3' ebenfalls, und man wird ansetzen können:

$$f_1' = ac,\ f_2' = ad,\ f_3' = bd,\ f_4' = bc.$$

$c = \frac{f_1'}{a}$ und $d = \frac{f_2'}{a}$ haben überdies gleichen Grad, ebenso a und b. So folgt Spezialsatz Q.

§ 12. Eine umfassendere Klasse von Systemen von vier abhängigen quaternären Formen.

Die Überlegungen des vorangehenden Paragraphen legen es nahe, die folgende sehr umfassende Klasse von Fällen aufzustellen, in denen zwischen $f_1, \cdots, f_4$ auch Relationen höheren als zweiten Grades bestehen.

B_1, B_2 seien irgend zwei Flächenbüschel der beliebigen Ordnungen b_1, b_2; man stelle zwischen ihnen vier Korrespondenzen $[s, t]$ her; die Schnittkurven entsprechender Flächen (in einer jeden dieser vier Korrespondenzen) erzeugen dann je eine Fläche, die ganz aus

Schnittkurven von Flächen des einen und des anderen Büschels besteht, also aus Kurven einer zweifach ausgedehnten Kurvenschar, die den Raum einfach erfüllt. Es soll gezeigt werden, daß die vier erzeugten Flächen abhängig sind.

Analytisch erhält man nämlich das Erzeugnis einer solchen Korrespondenz $[s, t]$, d. h. einer algebraischen Gleichung

$$G(\lambda, \mu) = 0$$

vom Grade s bezüglich λ und t bezüglich μ zwischen den Parametern λ, μ der beiden Flächenbüschel:

$$a + \lambda b, \qquad c + \mu d,$$

indem man $\lambda = -\frac{a}{b}$, $\mu = -\frac{c}{d}$ in $G = 0$ einsetzt und den dabei auftretenden Nenner durch Multiplikation mit $b^s d^t$ beseitigt. Bildet man vier derartige Formen

$$G_i\left(-\frac{a}{b}, -\frac{c}{d}\right) b^s d^t \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

von $x_1, \cdots x_4$, so drücken sich diese vier Formen rational und ganz durch $-\frac{a}{b}, -\frac{c}{d}$, $b^s d^t$ aus, also durch drei Größen, sind also abhängig.

Die Klasse (a) von abhängigen Flächen. Statuiert man zwischen zwei Flächenbüscheln beliebiger Ordnungen vier Korrespondenzen $[s, t]$, so sind die erzeugten vier Flächen abhängig.

Außerdem können noch die folgenden Klassen unmittelbar angegeben werden:

Klasse (b). Die 4 Formen sind ganze rationale Funktionen von drei Formen gleichen oder ungleichen Grades von $x_1, \cdots, x_4$.

Klasse (c). Man nehme irgend ein Flächenbüschel μ^{ter} Ordnung B, fasse drei Gruppen von je ν Flächen aus B als Flächen der Ordnung $n = \mu\nu$ auf, füge eine ganz willkürliche Fläche n^{ter} Ordnung hinzu und betrachte schließlich vier willkürliche lineare Verbindungen der konstruierten vier Flächen.

Auf die Frage, ob damit sämtliche Fälle von vier abhängigen Flächen angegeben sind, und ihren Zusammenhang mit der Geometrie auf den Flächen vom Flächengeschlecht 0 und mit der Verallgemeinerung des *Lürothschen* Satzes über rationale Kurven auf Flächen sei hier nicht näher eingegangen. Nur sei noch bemerkt, daß auch mit der Beantwortung dieser Frage die Behandlung der in der Einleitung zu dieser Arbeit (s. S. 1 unten) gestellten Aufgabe noch keineswegs erledigt wäre.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung und historische Übersicht 1

Erster Teil.

§ 1. Einige Hilfssätze 5
§ 2. Allgemeine Sätze über q abhängige Formen von p Variabeln $(q \leqq p)$ 8
§ 3. Anwendung auf drei und vier abhängige quadratische Formen von p Variabeln 13
§ 4. Einige Spezialsätze für den Fall $n = 2$, $\beta = 2$. Ergänzung des vorigen Paragraphen 15
§ 5. Spezialsätze über p abhängige quadratische Formen von p Variabeln $(n = 2, q = p)$ 18
§ 6. Der Fall $n = 2$, $\beta = 2$ bei ungeradem p 26
§ 7. Anwendung auf fünf abhängige quinäre quadratische Formen 30
§ 8. Weitere allgemeine Sätze über p abhängige Formen n^{ten} Grades von p Variabeln 35

Zweiter Teil.

§ 9. Der Satz von Pasch und sein Analogon für Formen von mehr als drei Variabeln 38
§ 10. Die geometrische Deutung der Differentialgleichung $D = 0$ und der zu ihr syzygetischen Differentialgleichungen, sowie der Formen ψ_i . . . 42
§ 11. Bestimmung aller Systeme von vier einfach abhängigen quaternären Formen gleichen Grades n, zwischen denen eine quadratische Identität $\omega = 0$ vom Höchstrange 4 besteht 44
§ 12. Eine umfassendere Klasse von Systemen von vier abhängigen quaternären Formen 45

Lebenslauf.

Ich, Otto Toeplitz, jüdischer Religion, bin am 1. August 1881 zu Breslau geboren, als der einzige Sohn des Oberlehrers am städtischen Johannes-Gymnasium, Professor Dr. Emil Toeplitz und seiner Frau Pauline, geb. Lubliner, deren Tod ich schon seit meiner Knabenzeit beklage. Von Ostern 1888 bis zu meiner Reifeprüfung Ostern 1900 besuchte ich das Johannes-Gymnasium zu Breslau, das den weitaus größten Teil dieser zwölf Jahre noch unter dem Direktorat des Professor Dr. C. F. W. Müller † stand. Ihm, an dessen Unterricht persönlich teilzunehmen mir nicht mehr vergönnt war, sowie meinen Lehrern am Johannes-Gymnasium weiß ich aufrichtigen Dank, vor allem für die logisch-ästhetische Bildung, die sie mir durch die Einführung in das klassische Altertum vermittelt haben, ebenso wie Herrn Professor Dr. Depène und meinem Vater für den mathematisch-physikalischen Unterricht.

Hauptsächlich infolge der vielfachen Anregungen, die ich von meinem Vater empfing, ergriff ich das Studium der Mathematik. Ich bezog die hiesige Universität, wo ich die Vorlesungen der Herren Professoren Ebbinghaus, Franz, Kneser, London, O. E. Meyer, E. R. Neumann, Rosanes, Sturm und des Herrn Dr. Cl. Schaefer hörte und an den Seminaren der Herren Professoren Rosanes (3 Semester), Sturm (4 Semester), E. R. Neumann (1 Semester) und Ebbinghaus teilnahm, in dessen psychologischem Laboratorium ich wiederholt arbeitete. Meinen Aufenthalt in Breslau unterbrach ich von Michaelis 1902 bis ebendahin 1903, um die Universität zu Berlin zu besuchen. Ich hörte dort die Vorlesungen der Herren Professoren H. A. Schwarz, Frobenius, Schottky und des Herrn Dr. Landau.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern sage ich meinen tiefgefühlten Dank für die Anleitung und die persönlichen Anregungen, durch die sie meine Studien in so vielfacher Weise gefördert haben, besonders aber Herrn Geheimrat Rosanes für das freundliche Interesse, das er der vorliegenden Arbeit entgegenbrachte.